Introduction : Mesures et espaces de probabilités

Références :
Poly cédric Bernardin et Jean Michel Morel.
J.-F. Le Gall, *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoire*
J.-Y. Ouvrard, *Probabilités 2, maîtrise-agrégation*, Cassini, (2000)
D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge University Press, (1991) Durrett R., *Probability : Theory and examples*, Duxburry, (1995).
Grimmett G., Stirzaker D., *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, Third Edition, (2001)

Lecons :
Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications.
Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
Suite de va de beroulli independantes
Utilisation en probas de la transformation de Fourier ou de Laplace et du produit de convolution.

Nous sommes habitués à munir un espace Ω d'une topologie pour regarder des convergences. Nous allons ici le munir d'une tribu pour mesurer des ensembles et intégrer. Nous avons surtout en tête de regarder des tribus engendrées par une topologie pour faire les deux et considérer des mesures de masse 1, c.a.d. des probabilités.

1 Algèbres, tribus, π-systèmes, λ-systèmes et espaces mesurables

Soit Ω un ensemble quelconque. On commence par définir toute une typologie de collections d'ensembles que l'on utilisera tout au long du cours.

Définition 1.1. ***(π,λ-systèmes, algèbres et tribus)***
1. Une classe $\mathcal{P}$ de sous-ensembles de Ω est appelée un π-système ssi :

$$A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$$

2. Une classe $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω est appelée une algèbre ssi :

i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

ii) $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}$.

iii) $F, G \in \mathcal{F} \Longrightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$.

3. Une classe $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω est une tribu (ou σ-algèbre) ssi :

i) $\mathcal{F}$ est une algèbre.

ii) Si $F_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.2. ***(λ-systèmes)***
Une classe $\mathcal{L}$ de sous-ensembles de Ω est appelée un λ-système ssi :

i) $\Omega \in \mathcal{L}$.

ii) Si $A, B \in \mathcal{L}$ et $A \subset B$ alors $B \backslash A \in \mathcal{L}$.

iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{L}$ alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$.

Remarque 1.1. *(i) Un tribu est une algèbre (qui est un π système) et un λ système.
Un λ système n'est pas forcement un π système (et donc une tribu), à cause de l'intersection. Prendre par exemple $\{\varnothing, A, B, \Omega - A, \Omega - B, \Omega\}$ qui est un λ système mais ne contient pas $A \cap B$.
Une algèbre est un π système, mais pas forcément vrai un λ système. Les parties de $\mathbb{N}$ finies ou de complémentaires finies forment une algèbre mais pas un λ système à cause des entiers pairs, tout commes les unions fines d'intervalles semi-ouverts.
(ii) La différence entre topologie et tribu ? Le passage par complementaire marche pour les tribus (pas pour les topologies) mais pour les tribus l'union doit etre dénombrable. La topologie est donnée par l'union quelconque d'intersection finie d'éléments des ensembles qui l'engendrent (ces intersections sont des bases de voisinage), la tribu c'est plus compliqué...
(iii) On peut remplacer les stabilités par intersection par des stabilités par union pour l'algèbre (et donc la tribu, mais pas le λ système) qui possèdent le passage au complémentaire et à l'union, et l'union par une union disjointe ou croissante pour la tribu.
(iv) Une intersection quelconque (dénombrable ou pas) de π-systèmes, λ-systèmes, d'algèbres ou de tribus est (respectivement) un π-système, un λ-système, une algèbre ou une tribu.
(v) Le π-système, le λ-système, l'algèbre ou la tribu engendrée par une partie χ est l'intersection de tous ceux contenant χ.
(vi) Vous savez engendrer une topologie par une base de voisage en prenant l'union quelconque d'intersection finie d'élément de cette base.*

*Le coin du curieux (cf le cours d'Amaury Lambert à Jussieu en L3, TD 4). On pourrait penser (au vue aussi de certains cas particuliers) que trouver la tribu engendrée par une classe C se fait en ajoutant à C les unions dénombrables et les complémentaires des parties de C. Manque de chance, cela ne marche pas toujours, notamment pour le cas de la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Et ce même si c'est un π système (ou que l'on ajoute les intersections dénombrables). Si l on obtient ainsi une tribu, on a bien trouvé la tribu engendrée par (C).
Si l on procède de la sorte en partant des intervalles réels, on ne tombe en effet pas sur une tribu. Il faut en fait itérer ce processus par récurrence transfinie pour obtenir la tribu des boréliens. Cela explique pourquoi il est impossible de fournir une description explicite complète des boréliens de $\mathbb{R}$. On peut montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ a la puissance du continu, ce qui montre l'existence de non-boréliens (car $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a une puissance strictement supérieure à celle du continu).*

Proposition 1.1. *Une collection de sous-ensembles de Ω est une tribu ssi c'est à la fois un λ-système et un π-système.*

Le théorème suivant est fondamental dans tout ce qui suit et notamment dans la démonstration du théorème de Carathéodory dont nous parlerons plus loin.

Théorème 1.1. ***(Dynkin)***
Si $\mathcal{P}$ est un π-système contenu dans un λ-système alors ce λ-système contient la tribu engendrée par ce π-système.

Démonstration. Voir TD. □

Intérêt : Montrer que les ensembles vérifiant une propriété P forment un λ système qui contient un π système pour obtenir que la tribu engendrée par le π système vérifie P.

Définition 1.3. ***Espace mesurable*** *Une paire $(\Omega, \mathcal{F})$, où Ω est un ensemble et $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, est appelée un espace mesurable. Un élément de $\mathcal{F}$ est appelé un ensemble $\mathcal{F}$-mesurable.*

Passons maintenant à un exemple fondamental d'espace mesurable. Soit S un espace topologique muni de sa famille $\mathcal{S}$ d'ouverts.
On appelle tribu borélienne sur S la tribu engendrée par $\mathcal{S}$.

On la note $\mathcal{B}(S)$ et ses éléments sont appelés les boréliens de $\mathcal{S}$. Cette tribu est engendrée (par exemple) par l'une des classes suivantes (qui sont des π système), voir TD :

$$\left\{\prod_{i=1}^{d}[a_i;b_i];a_i,b_i\in\mathbb{R}\right\},\ \left\{\prod_{i=1}^{d}(-\infty;b_i];b_i\in\mathbb{R}\right\},\ \left\{\prod_{i=1}^{d}[a_i;+\infty);a_i\in\mathbb{R}\right\}$$

Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ peuvent être très compliqués mais il est possible de construire des ensembles non boréliens (voir TD)

2 Mesure

Définition 2.1. *Soit μ une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, +\infty]$.*

1. μ est dite additivement dénombrable *si pour toute suite d'éléments disjoints $F_n \in \mathcal{F}$ tels que $\cup_n F_n \in \mathcal{F}$, $\mu(\cup_n F_n) = \sum_n \mu(F_n)$.*

2. μ est appelée mesure *sur un espace $(\Omega, \mathcal{F})$ mesurable ssi $\mu(\emptyset) = 0$ et μ est additivement dénombrable.*

Remarque 2.1. *$\star$ L'additivité dénombrabilité de la mesure entraîne sa monotonie : si $A_n \uparrow A$ avec $A_n \in \mathcal{F}$, alors $\mu(A_n) \uparrow A$. $\star$ Bien sur préciser $\mu(\emptyset) = 0$ est inutile par 2) si μ n'est pas identique à l'infini car $\mu(\emptyset) = \sum \mu(\emptyset)$. Tout comme préciser $\cup_n F_n \in \mathcal{F}$ est inutile dans 2) ici mais utile dans Carathéodory.*
$\star$ On dira que la mesure μ est finie (ou de masse finie) ssi $\mu(\Omega) < +\infty$.
$\star$ On dira qu'elle est σ-finie ssi il existe une suite $(\Omega_n)_n$ d'ensembles mesurables tels que $\mu(\Omega_n) < +\infty$ et $\Omega = \cup_n \Omega_n$.
$\star$ On appelera probabilité toute mesure μ de masse $\mu(\Omega)$ égale à 1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est alors appelé un espace probabilisé ou espace de probabilité.
$\star$ On peut compléter un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ en ajoutant les ensembles négligeables, i.e. les ensembles X tels qu'il existe $Z \in \mathcal{F}$ contenant X de mesure nulle. Pour les Boreliens, on obtient la tribu des Lebesguiens.
$\star$ On ne peut espérer avoir $\mu(\cup_{x\in I} F_x) = \sum_{x\in I} \mu(F_x)$ en général comme on peut le voir avec l'ensemble non dénombrable $I = [0, 1]$, $F_x = \{x\}$ et la mesure de Lebesgue (on obtient $1 = 0$).

2.1 Prolongement de mesures

Le problème posé est le suivant et est bien illustré par le cas de la mesure de Lebesgue λ. On cherche à définir une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tous réels $a < b$, $\lambda(]a, b[) = b - a$. Première question : existe-t-il une telle mesure ? Si oui, est-elle unique ?

Théorème 2.1. ***(Carathéodory)***
Soit Ω un ensemble muni d'une algèbre $\mathcal{F}_0$ et soit $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par cette algèbre. Si μ_0 est une application dénombrablement additive $\mu_0 : \mathcal{F}_0 \to [0; +\infty]$ alors il existe une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

$$\mu = \mu_0 \ \ sur \ \ \mathcal{F}_0$$

Si $\mu_0(\Omega) < +\infty$ alors cette extension est unique.

Pour obtenir la mesure de Lebesgue sur $((0,1], \mathcal{B}((0,1]))$, on peut prendre comme algèbre

$$F = (a_1, b_1] \cup \ldots \cup (a_r, b_r]$$

avec $r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r \leq b_r \leq 1$.

Pour la preuve, on commence par établir que deux mesures qui coïncident sur un π-système (ou donc une algèbre) coïncident aussi sur la tribu qu'engendre ce π-système (ou cette algèbre).

Proposition 2.1. ***(d'unicité des prolongements de mesures)***
Soit Ω un ensemble muni d'un π-système $\mathcal{P}$ et soit $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P})$. Supposons que l'on ait deux mesures μ_1 et μ_2 sur $\mathcal{F}$ de même masse finie, $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$, qui coïncident sur $\mathcal{P}$. Alors

$$\mu_1 = \mu_2$$

Ce résultat (comme d'autres plus loin) se généralise aux mesure σ finie par limite croissante.

Pour le prouver, on définit la classe $\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{F}; \mu_1(F) = \mu_2(F)\}$. Il est facile de voir que c'est un λ-système puisque puisque le fait que les deux mesures aient même masse montre que $\Omega \in \mathcal{D}$ et les masses finies assurent que $\mathcal{D}$ est stable par différence propre. Donc par le théorème de Dynkin, $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{F}$.

Passons maintenant à la preuve du théorème de Carathéodory.

Démonstration. *(Théorème de Carathéodory)*. Nous n'indiquerons que les principales étapes, les détails étant parfaitement expliqués dans [Williams, Probability with martingales].

Etape 1 : Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ la tribu composée de toutes les parties de Ω. Pour un $G \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit

$$\lambda(G) = \inf \left\{ \sum_n \mu_0(F_n) \right\}$$

où l'infimum est pris sur toutes les suites $(F_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}_0$ qui recouvrent G, i.e. $G \subset \cup_n F_n$. λ n'est pas une mesure mais est ce que l'on appelle (improprement) une "*mesure exterieure*", c'est-à-dire qu'elle jouit des propriétés suivantes :
a) $\lambda(\emptyset) = 0$.
b) λ est croissante : $G_1 \subset G_2 \Rightarrow \lambda(G_1) \leq \lambda(G_2)$.
c) λ est dénombrablement sous-additive : si $(G_k)_k$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ alors

$$\lambda\left(\cup_k G_k\right) \leq \sum_k \lambda(G_k)$$

Seule c) mérite d'être expliquée. Soit $(G_n)_n$ une suite supposée telle que pour chaque n, $\lambda(G_n) < +\infty$ (sinon c'est trivial). On se donne $\varepsilon > 0$ et pour chaque n, on se donne une suite d'éléments $(F_{n,k})_k$ de $\mathcal{F}_0$ pour lesquels

$$G_n \subset \cup_k F_{n,k} \ , \quad \sum_k \mu_0(F_{n,k}) \leq \lambda(G_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Alors $G \subset \cup_{n,k} F_{n,k}$ et on a :

$$\lambda(G) \leq \sum_{n,k} \mu_0(F_{n,k}) \leq \sum_n \lambda(G_n) + \varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, en le faisant tendre vers 0, on obtient c).

Etape 2 : On introduit alors la notion de λ-ensembles. Un élément L de $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelé un λ-ensemble ssi "il décompose tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ proprement", c'est-à-dire :

$$\lambda(L \cap G) + \lambda(L^c \cap G) = \lambda(G), \ \ \forall G \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Lemme 2.1. *Les λ-ensembles forment une tribu $\mathcal{L}$ sur laquelle λ est dénombrablement additive si bien que $(\Omega, \mathcal{L}, \lambda)$ est un espace mesuré.*

Démonstration. *Montrons ce lemme.* $\mathcal{L}$ est une algèbre qui jouit de la propriété suivante :

Si $L_1, L_2, \dots, L_n$ sont des éléments de $\mathcal{L}$ disjoints et $G \in \mathcal{P}(\Omega)$ une partie quelconque de Ω alors

$$\lambda\left(\cup_{k=1}^n (L_k \cap G)\right) = \sum_{k=1}^n \lambda(L_k \cap G) \qquad (\star)$$

Nous avons donc à démontrer que si $(L_k)_k$ est une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{L}$ alors $L = \cup_k L_k \in \mathcal{L}$ (cf. la remarque après la définition de la notion de tribu) et

$$\lambda(L) = \sum_k \lambda(L_k)$$

Par sous-additivité de λ, on a pour tout $G \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$\lambda(G) \leq \lambda(L \cap G) + \lambda(L^c \cap G)$$

Passons maintenant à l'inégalité inverse. Soit $M_n = \cup_{k \leq n} L_k$. Puisque $\mathcal{L}$ est une algèbre (cf ce qui précède), $M_n \in \mathcal{L}$ donc

$$\lambda(G) = \lambda(M_n \cap G) + \lambda(M_n^c \cap G)$$

Or $L^c \subset M_n^c$ si bien que

$$\lambda(G) \geq \lambda(M_n \cap G) + \lambda(L^c \cap G)$$

et par $(\star)$,

$$\lambda(G) \geq \sum_{k=1}^n \lambda(L_k \cap G) + \lambda(L^c \cap G)$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$\lambda(G) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(L_k \cap G) + \lambda(L^c \cap G) \geq \lambda(L \cap G) + \lambda(L^c \cap G)$$

la deuxième inégalité étant une conséquence de la sous-additivité de λ. On en déduit que $L \in \mathcal{L}$. D'autre part, puisque la dernière inégalité est en fait une égalité, on voit qu'il en est de même des autres et que finalement

$$\lambda(L \cap G) = \sum_k \lambda(L_k \cap G)$$

Il suffit maintenant de prendre $G = \Omega$ pour conclure.

$\square$

Il nous reste à voir que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{L}$ et $\lambda = \mu_0$ sur $\mathcal{F}_0$ pour achever la preuve du théorème.

Etape 3 : Preuve que $\lambda = \mu_0$ sur $\mathcal{F}_0$.

Soit $F \in \mathcal{F}_0$. On a bien entendu $\lambda(F) \leq \mu_0(F)$. Supposons maintenant que $F \subset \cup_n F_n$ où $F_n \in \mathcal{F}_0$. On définit une suite $(E_n)_n$ d'éléments disjoints de $\mathcal{F}_0$ par :

$$E_1 = F_1, \quad E_n = F_n \cap \left(\cup_{k<n} F_k\right)^c$$

si bien que $E_n \subset F_n$ et $F \subset \cup_n F_n = \cup_n E_n$. En utilisant la σ-additivité de μ_0 sur $\mathcal{F}_0$, on a

$$\mu_0(F) = \mu_0(\cup_n (F \cap E_n)) = \sum_n \mu_0(F \cap E_n)$$

Donc

$$\mu_0(F) \leq \sum_n \mu_0(E_n) \leq \sum_n \mu_0(F_n)$$

si bien que $\lambda(F) \geq \mu_0(F)$ ce qui conclut la troisième étape.

Etape 4 : Preuve de $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{L}$.

Il nous faut voir que si E est un élément de $\mathcal{F}_0$ alors E décompose proprement les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. Soit donc $G \in \mathcal{P}(\Omega)$ et soit pour $\varepsilon > 0$ quelconque une suite $(F_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}_0$ tels que $G \subset \cup_n F_n$ avec

$$\sum_n \mu_0(F_n) \leq \lambda(G) + \varepsilon$$

Par définition de λ,

$$\begin{aligned} \sum_n \mu_0(F_n) &= \sum_n \mu_0(E \cap F_n) + \sum_n \mu_0(E^c \cap F_n) \\ &\geq \lambda(E \cap G) + \lambda(E^c \cap G) \end{aligned}$$

car $E \cap G \subset \cup(E \cap F_n)$ et $E^c \cap G \subset \cup(E^c \cap F_n)$. Puisque ε est aussi petit que l'on veut,

$$\lambda(G) \geq \lambda(E \cap G) + \lambda(E^c \cap G)$$

Puisque λ est sous-additive,

$$\lambda(G) \leq \lambda(E \cap G) + \lambda(E^c \cap G)$$

Donc E est un λ-ensemble. □

2.2 Fonctions mesurables

Définition 2.2. *Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ sera dite mesurable si*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

On dit qu'elle est borélienne quand $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

On donne maintenant une version fonctionnelle du Théorème de Dynkin, souvent utile et appliquée sous une forme dans la construction de l'intégrale ensuite.

Exercice 2.1. (Théorème de la classe monotone, D. Williams, *Probability with martingales, p. 205*)
Soit $\mathcal{H}$ une classe de fonctions bornées de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant
(i) $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
(ii) la fonction constante 1 est un élément de $\mathcal{H}$
(iii) si f_n est une suite croissante de fonctions positives de $\mathcal{H}$, tendant vers une fonction f bornée sur Ω, alors $f \in \mathcal{H}$.
Alors, si $\mathcal{H}$ contient les fonctions indicatrices de tous les ensembles d'un π-système $\mathcal{I}$, $\mathcal{H}$ contient aussi toutes les fonctions $\sigma(\mathcal{I})$-mesurables et bornées sur Ω.

1) Soit $\mathcal{D}$ la classe des ensembles F tels que $\mathbb{1}_F \in \mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un λ-système et en déduire que $\mathcal{D}$ contient $\sigma(\mathcal{I})$.

2) Soit f une fonction $\sigma(\mathcal{I})$-mesurable telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}$, $0 \leq f(s) \leq K$, $\forall s \in \Omega$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions en escalier approximant f,

$$f_n(s) = \sum_{i=0}^{K2^n} i2^{-n} \mathbb{1}_{A(n,i)}(s),$$

où

$$A(n,i) = \{s,\ i2^{-n} \leq f(s) \leq (i+1)2^{-n}\}.$$

Montrer que $f_n \in \mathcal{H}$, puis que $f \in \mathcal{H}$. En déduire le théorème.

3 Exercices : Algèbres, tribus et compagnie

Exercice 3.1. Montrer que la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est engendrée par :

1. la classe des intervalles ouverts bornés
2. la classe des intervalles bornés $[a; b)$
3. la classse des demi-droites ouvertes $(-\infty; a)$
4. la classse des demi-droites fermées $(-\infty; a]$

Indication : Obtenir la première en utilisant que tout ouvert est l'union dénombrable disjointe d'intervalles ouverts (on montre cela en considérant la relation d'équivalence xRy ssi $[x, y] \subset O$) et en écrivant un intervalle non borné comme l'union de ses restrictions à $[-n, n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.2. Exercice (Lemme de Dynkin) (Williams, p 193)
Un π-système est un ensemble de parties de Ω stable par intersection finie.

Un λ-système est un ensemble $\mathcal{L}$ de parties de Ω qui est stable par différence propre et union dénombrable croissante et tel que $\Omega \in \mathcal{L}$.
1) Démontrer qu'une collection Σ de sous-ensembles de Ω est une tribu si et seulement si Σ est à la fois un

π-système et un λ-système.

2) On va montrer que si $\mathcal{I}$ est un π-système, alors la tribu $\sigma(\mathcal{I})$ engendrée par $\mathcal{I}$ et le λ-système engendré par $\mathcal{I}$ sont égaux : $\lambda(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$. La démonstration est détaillée dans les deux questions qui suivent.

2a) Soit $\mathcal{D}_1 = \{B \in \lambda(\mathcal{I}) :\ \forall C \in \mathcal{I}, B \cap C \in \lambda(\mathcal{I})\}$. Montrer que $\mathcal{D}_1$ hérite de la structure de λ-système de $\lambda(\mathcal{I})$. En déduire que $\mathcal{D}_1 = \lambda(\mathcal{I})$.

2b) Posons $\mathcal{D}_2 = \{A \in \lambda(\mathcal{I}) :\ \forall B \in \lambda(\mathcal{I}),\ B \cap A \in \lambda(\mathcal{I})\}$. Montrer que $\mathcal{D}_2$ contient $\mathcal{I}$ et hérite de la structure de λ-système de $\lambda(\mathcal{I})$. En déduire que $\mathcal{D}_2 = \lambda(\mathcal{I})$ est un π-système.

3) Déduire le **théorème de Dynkin** :
Soit $\mathcal{P}$ un π-système et $\mathcal{L}$ un λ-système tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. Alors la tribu engendrée par $\mathcal{P}$ est contenue dans $\mathcal{L}$.

Indications 2.a) $\mathcal{D}_1$ est un λ système qui contient I et qui est inclus dans $\lambda(I)$ donc $\mathcal{D}_1 = \lambda(I)$.
2.b)Le fait que $\mathcal{D}_2$ contient $\mathcal{I}$ se déduit de 2a). Puis en substituant $\lambda(\mathcal{I})$ à $\mathcal{I}$ dans 2a) et en remarquant que $\lambda(\lambda(\mathcal{I})) = \lambda(\mathcal{I})$, on obtient $\mathcal{D}_2 = \lambda(I)$

Exercice 3.3. (Il n'y a pas de tribu dénombrable. Cet exercice est extrait de Le Calcul Integral, H. Buchwalter (ne donne pas la correction).)
Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω supposée au plus dénombrable.

a) Démontrer que tout $\omega \in \Omega$ est contenu dans un plus petit élément de $\mathcal{F}$.
b) En déduire que $\mathcal{F}$ est exactement la tribu engendrée par une partition au plus dénombrable.
c) Montrer alors que $\mathcal{F}$ est nécessairement finie de cardinal une puissance de 2 et que donc il n'existe pas de tribu dénombrable au sens strict.
d) Trouver toutes les tribus de $\mathbb{N}$.
Réponses : a) Prendre l'intersection des éléments de $\mathcal{F}$ contenant w.
b) On note $F(w)$ l'ensemble minimal précédent. La famille $\{F(w)\ :\ w \in \Omega\}$ forme une partition pour $w \in \Omega$. En effet supposons $F(w_1) \cap F(w_2) \neq \varnothing$. Alors $w_1 \in F(w_2)$ puisque $w_1 \notin F(w_1) - F(w_2)$ et donc $F(w_1) \subset F(w_2)$ puis par symétrie $F(w_1) = F(w_2)$. Cette famille est au plus dénombrable car $\mathcal{F}$ l'est. Elle engendre la tribu car si $F \in \mathcal{F}$ alors $F = \cup_{w \in F} F(w)$ puisque $w \in F$ implique $F(w) \subset F$.
c) La tribu engendrée par une partition finie $A_1, \cdots, A_k$ fini est donnée par $\cup_{i=1}^{k}(A_i \text{ ou } A_i^c)$et a un cardinal égal à une puissance de deux. La tribu engendrée par une partition infinie est non dénombrable car elle contient (au moins) $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
d) Toutes les tribus engendrées par une partition de $\mathbb{N}$. En effet, on peut encore montrer la propriété a) : soit n_0 et prenons pour tout n une partie A_n contenant n_0 telle que $n \notin A_n$ (si un tel A_n existe : sinon prendre $A_n = \mathbb{N}$). On pose $F(n_0) = \bigcap_n A_n$. Ensuite on montre comme pour b) que ces ensembles forment une partition qui engendre la tribu.

Exercice 3.4. (Exemple d'ensemble non borélien) (Williams, p 192)
Soit $(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda)$ l'espace des réels muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1) On définit la relation binaire suivante sur $\mathbb{R}$

$$x\mathcal{R}y \text{ ssi } x - y \in \mathbb{Q}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Montrer que pour toute classe $C \in \mathcal{C}$ il existe $x \in C \cap [0,1)$. On choisit alors pour chaque classe C un x_C vérifiant la propriété précédente et on note $A = \{x_C / C \in \mathcal{C}\}$.
3) Montrer que

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} q + A \subset [-1,2)$$

et que les $q + A$ sont deux à deux disjoints.
4) En supposant A borélien, aboutir à une contradiction.

Exercice 3.5. Ouvert dense de mesure petite : Hauchecorne, "Les contre-exemples en mathématiques", pp. 128-131 Montrer qu'il existe un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et de mesure inférieure à ε.
Remarquer que cela prouve qu'il y a des ouverts denses de mesure aussi petite qu'on veut.
Indication : énumérer les rationnels q_n, $n \in \mathbb{N}$ et considérer les intervalles $]-\frac{1}{2^n} + q_n, q_n + \frac{1}{2^n}[$.

Exercice 3.6. (Ensembles de Cantor) (Hauchecorne, "Les contre-exemples en mathématiques", pp. 128-131)
On considère pour $0 < \alpha < 1$ l'opération suivante S_α : enlever à un intervalle $[a,b]$ son intervalle central

$$]\frac{a+b}{2} - \alpha\frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \alpha\frac{b-a}{2}[.$$

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une union finie d'intervalles disjoints. On note $s_\alpha(E)$ le résultat de l'application de s_α à tous les intervalles de E. Quand $\alpha = \frac{1}{3}$, l'ensemble $K_{\frac{1}{3}} = \bigcap_{n \geq 1} s_{\frac{1}{3}}^n([0,1])$ est appelé ensemble triadique de Cantor.
Plus généralement, si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n, ...)$ est une suite de coefficients $0 < \alpha_n < 1$, on pose encore

$$K_\alpha^n = s_{\alpha_n} s_{\alpha_{n-1}} ... s_{\alpha_1}([0,1]), \quad K_\alpha = \bigcap_{n \geq 1} K_\alpha^n.$$

1) Montrer que pour toute suite α, l'ensemble K_α est un compact d'intérieur vide, équipotent à l'ensemble des suites binaires $(\text{gauche}, \text{droite})^{\mathbb{N}}$.

Indication : tout élément de K_α est défini de manière unique par le fait qu'il appartient à l'intervalle de droite ou de gauche de K_α^1, puis au sous intervalle de cet intervalle de gauche ou de droite dans K_α^2, etc.
En déduire que K_α est équipotent à $[0,1]$.

2) Montrer que K_α est de mesure strictement positive si et seulement si $\sum_n \alpha_n < +\infty$. En déduire qu'il y a des ensembles boréliens équipotents à $\mathbb{R}$ et de mesure nulle et des fermés de mesure positive et d'intérieur vide.
Indication : La mesure de K_α est $\Pi_{i\geq 1}(1-\alpha_i)$.

Exercice 3.7. (Il existe un ensemble négligeable et non borélien)
1) Soit K l'ensemble triadique de Cantor. Montrer que c'est un compact non vide (donc borélien) négligeable de $\mathbb{R}$.
2) Montrer par récurrence que l'on peut définir une suite d́applications $\epsilon_n : [0,1) \to \{0,1\}, n \geq 1$ telle que

$$\forall x \in [0,1), \forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon_i(x)}{2^i} \leq x < \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon_i(x)}{2^i} + \frac{1}{2^n}$$

On définit alors pour x dans $[0,1)$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\epsilon_i(x)}{3^i}$$

Montrer que f est strictement croissante, injective et borélienne.
3) Soit A l'ensemble non borélien de léxercice 4.

1. Montrer que $f([0,1)) \subset K$
2. Montrer que $f(A)$ est négligeable pour λ.
3. En utilisant l'injectivité de f, établir que $f(A)$ n'est pas borélien.

Exercice 3.8. Les seules mesures sur $\mathbb{R}$ finies sur les bornés et invariantes par translation sont des multiples de la mesure de Lebesgue. (Problème 12.1 p. 180 du Billingsley).
Solution : appeler a la mesure d'un intervalle de longueur 1, montrer d'abord que les intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ ont mesure $\frac{a}{n}$, puis que les intervalles de longueur rationnelle q ont mesure aq, finalement que les intervalles de longueur quelconque b ont mesure ab. Déduire que la mesure considérée coïncide sur un π-système qui engendre les boréliens avec la mesure de Lebesgue et conclure.

Exercice 3.9. La formule du crible.
Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $A_1, ..., An \in \mathcal{F}$.

1) Montrer que par récurrence que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1\leq i_1 < ... < i_p \leq n} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_p}).$$

2) Montrer par récurrence sur n que pour $1 \leq m \leq n$,

$$\sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} \sum_{1\leq i_1 < ... < i_p \leq n} P(A_{i_1} \cap ... A_{i_p})$$

est une majoration (resp. minoration) de $P(\cup_{i=1}^n A_i)$ lorsque m est impair (resp. pair).

Exercice 3.10. (Théorème de Sard) Soit f une fonction C^1 d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On appelle point singulier de f un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Df(x)$ est non inversible. On note $|Df(x)|$ le jacobien de f.

L'ensemble des points singuliers est donc $S(f) = (|Df|)^{-1}(0)$. Le théorème de Sard dit simplement que l'ensemble $f(S(f))$ est de mesure nulle.

1) Se convaincre que l'on peut se contenter de montrer le théorème de Sard quand f est définie sur un compact. Alors $S(f)$ est compact.

2) On note $B(x,r)$ la boule de centre x et de rayon r. Soit $x_0 \in S(f)$. En écrivant la formule de Taylor, $f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)$, montrer qu'il existe un sous-espace propre V de $\mathbb{R}^N$ et une constante C tels pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que

$$f(B(x_0,r)) \subset f(x_0) + B_V(0,\ Cr) + B(0,\varepsilon r),$$

où $B_V(0,r)$ désigne la boule de rayon r dans V.

3) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $r > 0$, K soit recouvert par des cubes $(C_{i,r})_{i\in I}$ de diamètre r et $\sum_i mesure(C_{i,r}) \leq C$.

4) En recouvrant $S(f)$ comme indiqué dans la question précédente, montrer le résultat annoncé.

Solution : On écrit $\mathbb{R}^N = KerDf(x_0) \oplus (KerDf(x_0))^\perp$ et, sur cette somme orthogonale d'espaces, on décompose $x-x_0 = y+z$, de sorte que $||y|| \leq r$, $||z|| \leq r$ si $x-x_0 \in B(0,r)$. On note $V = Df(x_0)(KerDf(x_0)^\perp)$. Donc si $||x-x_0|| < r$ assez petit,

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(z) + o(x-x_0) \in f(x_0) + B_V(0,Cr) + B(0,\varepsilon r),$$

avec $C = ||Df(x_0)||$ et où $B_V(0,Cr)$ est la boule de centre 0 et de rayon Cr dans V. On vérifie aisément que la mesure de $f(B(x_0,r))$ est alors plus petite que $C_1 r^N \varepsilon^d$ où d est la dimension de $KerDf(x_0)$ et C_1 une constante adéquate.
On conclut ensuite avec le recouvrement fini par des cubes, en sommant les mesures des cubes de diamètres (qui sont inclues dans les boules de diamètres) r, ce qui majore la mesure globale par $\epsilon r.\#I_r \leq \epsilon C$.

4 Intégrale contre une mesure

On donne ici les grandes lignes pour la construction de l'intégrale contre une mesure finie et l'objectif sera d'intégrer contre une probabilité $\mathbb{P}$ et d'introduire l'espérance d'une variable aléatoire X comme

$$\int f(x)\mu(dx), \qquad \mathbb{E}(X) := \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

On peut en fait étendre cette construction à des mesures σ finie par limite croissante.

4.1 Construction : la machine standard

Etape 1. Soit f une fonction simple (ou étagée) positive, c'est-à-dire de la forme

$$f = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{A_k}$$

où les a_k sont des réels positifs et A_k des éléments de $\mathcal{F}$. On définit l'intégrale de f relativement à μ par

$$\int f\mu = \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k)$$

On vérifie aisément que cette définition est cohérente, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de l'écriture de f choisie. D'autre part, des propriétés simples comme la linéarité, la positivité se démontrent aisément.

On peut construire des modes d'approximation simples pour une fonction mesurable positive. Par exemple si f est positive mesurable,

$$f_k := \sum_{l=0}^{k2^k-1} \frac{l}{2^k} 1\!\!1_{[\frac{l}{2^k} \leq f < \frac{l+1}{2^k}]} + k 1\!\!1_{[f \geq k]}$$

converge simplement vers f et uniformément si f est en plus bornée. Ceci motive la définition suivante et préfigure les résultats de passage à la limite monotone (Beppo-Lévy)

Etape 2. Soit maintenant f une fonction positive mesurable. On définit son intégrale par

$$\int f\mu = \sup\{\int h\mu : h \text{ fonction simple positive }, h \leq f\}$$

Cette quantité peut être infinie et on dira que f est intégrable si elle est finie. *On vérifie que si h est une fonction simple positive, alors cette nouvelle définition reste cohérente avec l'ancienne.*

On vérifie sans mal la liéarité de l'intégrale. Vient alors le théorème de convergence monotone pour les fonctions mesurables positives :
Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives convergeant en croissant μ p.p. vers une fonction f (mesurable positive) alors

$$\int f_n\mu \uparrow \int f \tag{4.1}$$

Cette démonstration n'est pas difficile car ce théorème vient essentiellement du fait que si $A_n \uparrow A$, alors $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$. Voici la marche de la démonstration. On va la faire dans le cas $\int f\mu < +\infty$; le cas $\int f\mu = +\infty$ suit exactement la même démarche.

On commence par remarquer qu'il existe une suite croissante de fonctions simples g_n telle que $\int g_n\mu \uparrow \int f\mu$ et $g_n \uparrow f$ p.s. Pour cela on prend une suite croissante g_n de fonctions simples telles que $\int g_n\mu \uparrow \int f\mu$. On peut toujours remplacer g_n par $\sup_{i=1,\ldots,n} g_i$, qui est bien une suite croissante. On montre alors que $g_n \uparrow f$ p.s., par l'absurde En effet, si $\mu(\sup g_n < f) > 0$, par la propriété de continuité de la mesure pour les suites croissantes pour quelque $\eta > 0$, l'ensemble $A := \cap_n \{g_n \leq f - \eta\}$ est de mesure strictement positive. Alors en remplaçant g_n par $h_n := g_n + \eta 1\!\!1_A$, on arrive à une contradiction car $h_n \leq g$ et

$$\int g\mu \geq \int h_n\mu \geq \int g_n\mu + \eta\mu(A) \to \int g\mu + \eta\mu(A).$$

Fixons maintenant g telle que $g \leq f$ et $\int g\mu \geq \int f\mu - \varepsilon$. Par l'étape précédente des fonctions simples g_n telles que $\mathbb{P}(g_n \leq f_n - \varepsilon) < \frac{1}{2^n}$. On remarque que par l'étape précédente $g_n \wedge g$ tend vers g p.p. et qu'il nous suffit de montrer que $\int g\mu_n$ tend vers $\int g\mu$. Comme $\mathbb{P}(g - g_n) > \varepsilon \to 0$, on peut prendre n assez grand pour que cette probabilité soit plus petite que ε. Comme g_n et g sont simples, en nommant A_k la famille finie des intersections d'ensembles où elles sont chacune constantes, on peut écrire $g_n = \sum_k a_k 1\!\!1_{A_k}$ et $g = \sum_k b_k 1\!\!1_{A_k}$ et on a alors $\mathbb{P}(\cup_{k|b_k - a_k > \varepsilon} A_k) \leq \varepsilon$. Il suffit d'exprimer les espérances de ces deux fonctions simples pour conclure que $\int g\mu - \int g_n\mu < \varepsilon + \varepsilon \sup g$.

Le lemme de Fatou se déduit aisément du théorème de convergence monotone. On démontre aussi à ce stade la linéarité et la positivité de l'espérance.

Etape 3. Soit f une fonction mesurable de signe quelconque. On décompose f en sa partie positive $f^+ = \sup(f, 0)$ et sa partie négative $f^- = \sup(-f, 0)$ si bien que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. On dira que f est intégrable ssi $|f|$ l'est (ce qui implique que f^+ et f^- le sont). Si f est intégrable, on définit son espérance par

$$\int f\mu = \int f^+\mu - \int f^-\mu$$

L'ensemble des fonctions intégrables forme un espace vectoriel sur lequel l'espérance ainsi définie est une forme linéaire positive. C'est à ce stade que le théorème de convergence dominée s'établit modulo le lemme de Sheffé (voir TD).

On remarquera que la construction de l'intégrale se fait selon trois grandes étapes : on commence par définir l'espérance sur les fonctions simples, puis sur les fonctions mesurables positives grâce à une propriété de monotonie et enfin on passe au cas d'une fonction de signe quelconque grâce à la décomposition de f en sa partie positive et sa partie négative. Cette structure en trois étapes est constamment utilisée dans diverses preuves. On peut aussi souvent s'appuyer dans ce genre de démarche sur le Théorème de la classe monotone donné précedemment.

4.2 Rappel : Intégrale de Lebesgue

Nous rappelons ici les résultats principaux et donnons un certain nombre d'exercices plus ou moins standards.

Théorème 4.1. *(Beppo Levi, ou convergence monotone)*
Si f_n est une suite croissante de fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx \leq +\infty.$$

Corollaire 4.1. *Soit $u_n(x)$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On peut alors l'intégrer terme à terme, c'est-à -dire que*

$$\int \Sigma_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \Sigma_{n=1}^{\infty} \int u_n(x)dx \leq +\infty.$$

Théorème 4.2. *(Théorème de Lebesgue)*
Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction positive sommable fixe h telle que pour tout n, $|f_n(x)| \leq h(x)$ pour presque tout x. Alors

$$\int |f_n(x) - f(x)|dx \to 0, \quad \int f_n(x)dx \to \int f(x)dx.$$

Théorème 4.3. *(Réciproque du théorème de Lebesgue).*
Si $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^1$, alors il existe une sous-suite f_{n_k} de la suite f_n qui converge presque partout vers f et un chapeau intégrable h tel que $\forall k$, $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ p.p..

Théorème 4.4. *(Théorème de dérivation sous le signe somme) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On se donne une fonction f définie sur $A \times I$ vérifiant les trois hypothèses suivantes.*
(a) Pour tout $\lambda \in I$, la fonction $x \to f(x, \lambda)$ est sommable sur A.
(b) La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ existe en tout point de $A \times I$.
(c) Il existe une fonction h positive et sommable sur A telle que l'on ait $|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)| \leq h(x)$ pour tous x et λ.
Alors la fonction F définie par

$$F(\lambda) = \int_A f(x, \lambda)dx$$

est dérivable dans I et on a

$$F'(\lambda) = \int_A \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)dx.$$

Théorème 4.5. *(de changement de variable, Buchwalter H.,* Le Calcul inrégral*)*
Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et φ un difféomorphisme entre Ω_1 et Ω_2. On notera $J_\varphi(x)$ le déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x. Soit f une fonction définie sur Ω_2.
(a) Si la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a l'égalité suivante, où les deux membres ont un sens dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\int_{\Omega_2} f(y)dy = \int_{\Omega_1} f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx.$$

(b) Si f est à valeurs complexes, elle est sommable dans Ω_2 si et seulement si $f(\varphi(x))J_\varphi(x)$ est sommable dans Ω_1, et les deux membres de l'égalité précédente sont alors égaux.

Théorème 4.6. *(Fubini)*
Soit $f(x,y)$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.
(a) Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a l'égalité suivante, où les trois membres définissent un élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)dxdx = \int_{\mathbb{R}^p} \big(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy\big)dx = \int_{\mathbb{R}^q} \big(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx\big)dy.$$

Si f est sommable dans $\mathbb{R}^{p+q}$, les trois membres de l'égalité précédente ont un sens et sont égaux. Plus précisément, dire que le troisième membre a un sens signifie :
- *pour presque tout y, la fonction $x \to f(x,y)$ est sommable dans $\mathbb{R}^p$,*
- *la fonction $\varphi(y) = \int f(x,y)dx$ qui est ainsi définie presque partout est sommable dans $\mathbb{R}^q$.*

4.3 Exercices

Exercice 4.1. Tout graphe est de mesure nulle.

1) Démontrer que le graphe d'une application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. (On montrera que la portion du graphe comprise entre les abcisses $-k$ et k peut être recouverte par des rectangles dont la somme des mesures est arbitrairement petite).

2) Même question si $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, puis si f est borélienne.

Solution Comme $[-k,k]$ est un compact, la fonction f considérée est uniformément continue sur $[-k,k]$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x-y| \leq \frac{1}{n}$, $x,y \in [-k,k] \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4k}$. On recouvre $[-k,k]$ par n intervalles consécutifs de longueur $\frac{2k}{n}$. On vérifie aisément que les $2n$ rectangles $[l\frac{1}{n},(l+1)\frac{1}{n}]\times[f((l+\frac{1}{2})\frac{k}{n})-\frac{\varepsilon}{4k}, f((l+\frac{1}{2})\frac{k}{n})+\frac{\varepsilon}{4k})]$, $l=-n,-(n-1),...,n-1$ recouvrent le graphe de f sur $[-k,k]$. Donc la mesure de ce graphe est plus petite que $2n\frac{2k}{n}\frac{\varepsilon}{4k}=\varepsilon$.

Solution plus élégante : Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = y - f(x)$. Alors $\varphi^{-1}(0) = \{(x,f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$ et par le théorème de Fubini-Tonnelli,

$$\lambda(\{(x,f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y=f(x)}(x,y)dy)dx = 0$$

car les singletons sont de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 4.2. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^N$ et soit h égale à $+\infty$ dans A et à 0 dans son complémentaire. Démontrer que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)dx = 0 \text{ si } \lambda(A) = 0,\ \int_{\mathbb{R}^N} h(x)dx = +\infty \text{ si } \lambda(A) > 0.$$

Supposons que $\lambda(A) = 0$. On pose $h_k(x) = \min(h(x), k)$. Comme A est de mesure nulle, on a par définition de $\lambda(A)$, $\int \mathbb{1}_A dx = \lambda(A) = 0$. Donc

$$\int h_k(x)dx = k \int \mathbb{1}_A dx = 0.$$

Par le théorème de la convergence monotone, $\int h(x)dx = \lim_{k\to\infty} h_k(x)dx = 0$. Si maintenant $\lambda(A) > 0$, on a, encore par le théorème de la convergence monotone,

$$\int h(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int h_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} k\lambda(A) = +\infty.$$

On déduit immédiatement que si $f \geq 0$ vérifie $\int f < \infty$, alors l'ensemble $A = \{x, f(x) = +\infty\}$ est de mesure nulle.

Exercice 4.3. Soit f et g deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$ p.p.. Montrer que f et g sont égales partout.

Solution : Comme les boules sont de mesure strictement positive, on déduit que $f(x) = g(x)$ sur un ensemble dense de $\mathbb{R}^N$, et, par continuité, partout.

Exercice 4.4. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\int_a^b f(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \text{ quand } a \to -\infty,\ b \to +\infty.$$

Généralisation : soit A_n une suite croissante d'ensembles tels que $\bigcup_n A_n = \mathbb{R}^N$. Démontrer que $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)dx$.

Solution : Appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite $(f\mathbb{1}_{A_n})_n$.

Exercice 4.5. Soit h une fonction positive intégrable sur $\mathbb{R}^N$ et A_n des boréliens de $\mathbb{R}^N$ tels que $\lambda(A_n) \to 0$. Démontrer que $\int_{A_n} h(x)dx \to 0$ quand $n \to \infty$.

Solution Notons $[h \leq M]$ l'ensemble $\{x, h(x) \leq M\}$. On écrit

$$\int_{A_n} h(x) \leq \int_{A_n \cap [h(x)\leq M]} h(x)dx + \int_{A_n \cap [h(x) > M]} h(x)dx \leq M\lambda(A_n) + \int_{[h(x)>M]} h(x)dx. \tag{4.2}$$

Par le théorème de la convergence dominée, on a $\int_{[h(x)>M]} h(x)dx \to 0$. En effet, $h(x)\mathbb{1}_{[h(x)>M]}$ tend vers zéro presque partout car $\lambda([h = +\infty]) = 0$ et $|h(x)|$ est chapeau intégrable. On peut donc fixer pour tout $\varepsilon > 0$, M tel que $\int_{[h(x)>M]} h(x)dx < \varepsilon$. On choisit ensuite n suffisamment grand pour que $M\lambda(A_n) < \varepsilon$ et on déduit alors de (4.2), $\int_{A_n} h(x)dx < 2\varepsilon$.

Exercice 4.6. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ à l'aide de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Indication : on posera $f_n(x) = \Sigma_0^n (-1)^k x^k$ pour $x \in [0, 1]$. On trouvera un chapeau intégrable pour les f_n et on appliquera le théorème de Lebesgue.

Solution On sait que $f_n(x) \to \Sigma_0^\infty (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ pour tout $0 \leq x < 1$. Par ailleurs, la série étant alternée, $f_0(x) = 1$ est "chapeau intégrable" pour $f_n(x) \geq 0$ sur [0,1]. Par le théorème de Lebesgue, on déduit que $f_n(x) \to \frac{1}{1+x}$ dans $\mathbb{L}^1(0, 1)$, ce qui implique que $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = Log2$. En intégrant terme à terme, on obtient $\Sigma_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = Log2$.

Exercice 4.7. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Calculer la limite de $n \int_1^\infty f(nx)dx$ quand $n \to +\infty$.

Solution : En posant $y = nx$, on a $n\int_1^\infty f(nx)dx = \int_n^\infty f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}(y)f(y)dy$. La fonction $f(y)\mathbb{1}_{[n,\infty[}(y)$ tend ponctuellement vers zéro quand $n \to \infty$ et $|f|$ en est chapeau intégrable. Donc par le théorème de Lebesgue, l'intégrale considérée tend vers zéro.

Exercice 4.8. *(Déduire le Lemme de Fatou du théorème de convergence monotone)*
On rappelle la définition de la limite inférieure d'une suite a_n de réels :

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \inf_{n\geq N} a_n$$

Cette limite est une limite croissante et donc elle existe toujours dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
i) Remarquer que si g_n est une suite de fonctions sommables positives, alors $\int \inf_n g_n \leq \inf_n \int g_n$.
ii) Soit f_n une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On pose $g_N = \inf_{n\geq N} f_n$. Montrer que $\lim_{N\to\infty} \int g_N = \int \lim_{N\to\infty} g_N$.
iii) Déduire des questions précédentes le lemme de Fatou :

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Solution : i) Si g_n est une suite de fonctions sommables positives, on a pour tout n $\int \inf_n g_n \leq \int g_n$. En prenant l'infimum des deux cotés, on obtient $\int \inf_n g_n \leq \inf_n \int g_n$.
ii) La suite $(g_N)_N$ est une suite croissante de fonctions positives ou nulles. Par le théorème de la convergence monotone, on a donc $\lim_{N\to\infty} \int g_N = \int \lim_{N\to\infty} g_N$.
iii) En combinant l'égalité du ii) et l'inégalité du i), on obtient directement le lemme de Fatou :

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Exercice 4.9. *contrexemples*
Donner des exemples de suites de fonctions $f_n \in \mathbb{L}^1(0,1)$ telles que
- $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^1$ et $f_n(x)$ ne tend pas presque partout vers $f(x)$.
- f_n ne tend pas vers f dans $\mathbb{L}^1$ et $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ presque partout.

Solution :
• *On considère la suite de fonctions f_n définies sur $[0,1]$ par*
$f_1 = 1$ sur [0,1]
$f_2 = 1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, 0 ailleurs
$f_3 = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$, 0 ailleurs
$f_4 = 1$ sur $[0, \frac{1}{4}]$, 0 ailleurs
$f_5 = 1$ sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, 0 ailleurs
$f_6 = 1$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, 0 ailleurs...
La formule générale est :
Si $2^{k-1} \leq n < 2^k$, alors $f_n = 1$ sur $[\frac{n-2^{k-1}}{2^{k-1}}, \frac{n+1-2^{k-1}}{2^{k-1}}] = [\frac{n}{2^{k-1}} - 1, \frac{n+1}{2^{k-1}} - 1]$.
Cette suite de fonctions est une "bosse roulante" dont la largeur tend vers zéro, mais qui balaye constamment l'intervalle $[0,1]$. Elle est positive et son intégrale tend vers zéro. Donc $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Par contre, $f_n(x)$ ne tend jamais vers 0. En effet, si x est un point de [0,1], on peut poser par division euclidienne $x = \frac{N}{2^{k-1}} + r$, avec $N < 2^{k-1}$ et $r < \frac{1}{2^{k-1}}$. Posons $n = N + 2^{k-1}$, ce qui permet d'écrire x sous la forme $x = \frac{n-2^{k-1}}{2^{k-1}} + r$. On voit que $f_n(x) = 1$, alors que $f_{n+2}(x) = 0$ par exemple. Donc $f_n(x)$ ne converge nulle part !

• *On pose $f_n(x) = n$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Alors $f_n(x)$ tend vers 0 pour tout $x \in]0,1]$. Par contre, $\int f_n = 1$ et donc f_n ne tend pas vers 0 dans $\mathbb{L}^1$.*

Exercice 4.10. *Coupes d'un ensemble mesurable*
Soit E un sous-ensemble de mesure bornée de $\mathbb{R}^N$. Démontrer que pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$, E contient un sous-ensemble de mesure $\alpha.\lambda(E)$.

Solution : On pose $x = (x_1, ..., x_N)$ *et*

$$m(r) = \lambda(\{x \in E,\ x_1 \le r\}) = \int_{\mathbb{R}^N} 1\!\!1_{\{x,\ x_1 \le r\}} dx.$$

Une application immédiate du théorème de Lebesgue montre que m *est une fonction continue. Toujours par le même théorème, on montre que* $m(r) \to 0$ *quand* $r \to -\infty$ *et* $m(r) \to \lambda(E)$ *quand* $r \to +\infty$. *(Dans tous les cas, on utilise tout bonnement la fonction* $1\!\!1_E$ *comme chapeau intégrable). Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction* $m(r)$, *il existe donc pour tout* $0 < a < \lambda(E)$ *un réel* r *tel que* $m(r) = a$.

Exercice 4.11. *Convergence* $\mathbb{L}^1$ *quand il y a "conservation de la masse" (Lemme de Scheffé)*
Montrer que si une suite de fonctions $(w_n)_n \in \mathbb{L}^1$ vérifie $w_n \ge 0$, $w_n(x) \to w(x)$ presque partout, $w \in \mathbb{L}^1$ et $\int w_n \to \int w$, alors $w_n \to w$ dans $\mathbb{L}^1$. Indication : écrire $\int w - w_n = \int (w - w_n)^+ - \int (w - w_n)^-$ et $\int |w - w_n| = \int (w - w_n)^+ + \int (w - w_n)^-$ et appliquer le théorème de Lebesgue.

Solution Comme $w_n \ge 0$, *on a* $0 \le (w - w_n)^+ \le w \in \mathbb{L}^1$ *et donc par le théorème de Lebesgue* $\int (w - w_n)^+ \to 0$. *On déduit de la relation* $\int (w - w_n)^+ - \int (w - w_n)^- = \int w - w_n \to 0$ *que* $\int (w - w_n)^-$ *tend aussi vers zéro et finalement que la somme des deux mêmes intégrales* $\int |w - w_n| = \int (w - w_n)^+ + \int (w - w_n)^-$ *tend vers zéro.*

Exercice 4.12. *Critère d'intégrabilité sur un borné* B *de* $\mathbb{R}^N$
On va montrer dans cet exercice que $f \in \mathbb{L}^1(B)$ si et seulement si $\forall \varepsilon \quad \exists \eta, \quad \lambda(K) \le \eta \Rightarrow \int_K |f| \le \varepsilon$.
i) Montrer que si le critère d'intégration est vérifié, alors f est intégrable.
ii) Pour la réciproque, on raisonne par contradiction et on suppose qu'il existe $f \in \mathbb{L}^1(B)$ telle que le critère d'intégration ne soit pas vérifié. Montrer qu'il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite K_n de sous-ensembles de B tels que $\int_{K_n} |f| \ge \varepsilon$ et $\lambda(K_n) \le \frac{1}{2^n}$.
On pose $J_n = \cup_{n+1}^{\infty} K_k$. Montrer que $\int_{J_n} |f| \to 0$ et conclure.
Autre méthode : appliquer directement le résultat de l'exercice 4.5 !
iii) (facultatif) Adapter le critère d'intégrabilité à $\mathbb{R}^N$.

Solution On applique le critère d'intégration avec par exemple $\varepsilon = 1$. *Il existe donc* η *tel que* $\lambda(K) \le \eta \Rightarrow \int_K |f| \le 1$. *Comme* B *est borné, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de mesure inférieure à* η, $B_1, ..., B_k$. *On a donc* $\int_B |f| \le \Sigma_{i=1}^k \int_{B_i} |f| \le k$, *ce qui prouve que* $f \in \mathbb{L}^1(B)$.
Réciproquement, soit $f \in \mathbb{L}^1(B)$ *et supposons par contradiction qu'il existe* ε *et une suite* K_n *de sous-ensembles de* B *tels que* $\int_{K_n} f \ge \varepsilon$ *et* $\lambda(K_n) \to 0$. *Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que* $\lambda(K_n) \le \frac{1}{2^n}$. *On pose* $J_n = \cup_{k=n+1}^{\infty} K_k$. *Donc* $mes(J_n) \le \Sigma_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \le \frac{1}{2^n}$. *La suite* g_n *des fonctions caractéristiques des* J_n *est une suite décroissante de fonctions positives dont l'intégrale tend vers zéro. Elle converge donc presque partout vers zéro. Revenant à* f, *on a* $\int_{J_n} |f| = \int_B g_n(x)|f(x)|dx$. *Comme* $g_n(x)|f(x)|$ *tend presque partout vers zéro et que* $|f|$ *est chapeau intégrable, on conclut que* $\int_{J_n} |f| \to 0$, *ce qui contredit le fait que* $\int_{J_n} |f| \ge \varepsilon$.

Exercice 4.13. *Réciproque du Théorème de Lebesgue*
On va montrer que si f_n est une suite convergente dans $\mathbb{L}^1$, alors il existe une sous-suite qui converge presque partout et qui a un chapeau intégrable.
i) Montrer que si la suite f_n converge vers f dans $\mathbb{L}^1$, on peut en extraire une sous-suite telle que $\|f_{i_{n+1}} - f_{i_n}\|_1 < 2^{-n}$.
ii) On pose $g_n = f_{i_{n+1}} - f_{i_n}$; montrer en appliquant le théorème de convergence monotone que la série $\Sigma |g_n(x)|$ appartient à $\mathbb{L}^1$ et converge donc pour presque tout x. En déduire que f_{i_n} converge presque partout.
iii) Déduire aussi que f_{i_n} a un chapeau intégrable.
iv) Adapter le raisonnement précédent à une suite f_n qui est de Cauchy dans $\mathbb{L}^1$ pour montrer que $\mathbb{L}^1$ est un espace complet.

Solution : i)Si $f_n \to f$ *dans* $\mathbb{L}^1$, *alors* $\exists i_n, \|f_{i_n} - f\|_1 < 2^{-n-1}$. *Donc* $\|f_{i_{n+1}} - f_{i_n}\|_1 < 2^{-n-1} + 2^{-n-2} < 2^{-n}$.

ii) On a $\Sigma_n \|g_n\|_1 \leq \Sigma 2^{-n} = 1$. On pose $h(x) = \Sigma_n |g_n(x)|$. Cette série est positive et converge partout (éventuellement vers l'infini). Par le théorème de convergence monotone, $\int h(x)dx = \Sigma_n \int |g_n(x)|dx = \Sigma_n \|g_n\|_1 \leq 1$. Donc $h(x) \in \mathbb{L}^1$ et on déduit que la série de réels $\Sigma_n |g_n(x)|$ est convergente pour presque tout x. Il est donc de même pour la série $\Sigma_n g_n(x)$. Cette dernière série a $h(x)$ pour chapeau intégrable. Par le théorème de Lebesgue, elle est donc convergente dans $\mathbb{L}^1$. Comme $f_{i_{n+1}} = f_{i_1} + \Sigma_1^n g_n$, on en déduit que $(f_{i_n})_n$ converge dans $\mathbb{L}^1$.
iii) $|f_{i_1}| + h(x)$ est un chapeau intégrable pour la suite $(f_{i_n})_n$.
iv) Adaptation à la démonstration de complétude de $\mathbb{L}^1$: Si f_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^1$, on peut définir g_n comme précédemment et appliquer exactement le même raisonnement pour prouver que la série $\Sigma_n g_n(x)$ converge pour presque tout x et a donc une limite ponctuelle $f(x)$. On déduit alors du théorème de Lebesgue que $(f_{i_n})_n$ converge vers f dans $\mathbb{L}^1$. Il est alors immédiat (inégalité triangulaire) que toute la suite $(f_n)_n$ converge vers f.

Exercice 4.14. Calculer la dérivée à droite en zéro de la fonction

$$t \to \int_0^1 (g(x) + t^2)^{\frac{1}{2}} dx = \varphi(t),$$

où g vérifie $0 \leq g \leq 1$. Indication : pour évaluer la limite du rapport $\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$, penser à utiliser le théorème de Lebesgue.

Solution On a

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{f(x)^2 + t^2} + \sqrt{f^2(x)}} dx = \int_0^t k_t(x) dx.$$

On voit que $k_t(x) = 1$ si $f(x) = 0$ et $k_t(x) \to 0$ quand $t \to 0$ si $f(x) \neq 0$. Donc $k_t(x) \to \mathbb{1}_{\{f(x)=0\}}$, la fonction caractéristique de l'ensemble des points où $f(x)$ s'annule. Ceci nous donne la limite ponctuelle. Cherchons un chapeau intégrable. On voit immédiatement que $|k_t(x)| \leq 1$. Donc, par le théorème de Lebesgue, $k_t \to \mathbb{1}_{\{f(x)=0\}}$ quand $t \to 0$ dans $\mathbb{L}^1(0,1)$. D'où $\varphi'(0^+) = \int \mathbb{1}_{\{f(x)=0\}} = \lambda(\{x, f(x) = 0\})$.

Exercice 4.15. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \Gamma_n$, où $\Gamma_n = \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx$.

Solution Notons $\mathbb{1}_{[0,n]}$ la fonction caractéristique de $[0, n]$, qui vaut 1 si $x \in [0, n]$ et 0 ailleurs. Alors

$$\Gamma_n = \int_0^{+\infty} (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) dx.$$

On calcule la limite ponctuelle de l'intégrand : Comme $(1 - \frac{x}{n})^n = e^{n \log(1 - \frac{x}{n})} \to e^{-x}$ quand $n \to +\infty$, on voit que l'intégrand tend vers $e^{-\frac{x}{2}}$. Reste à trouver un chapeau intégrable. Si $x \leq n$, $\log(1 - \frac{x}{n}) \leq -\frac{x}{2n}$. Donc $(1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$ pour tout $x \geq 0$. On conclut par le théorème de Lebesgue que $\Gamma_n \to \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 2$.

Exercice 4.16. On pose, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Démontrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Démontrer que $\Gamma(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$. Pour la deuxième question, penser à utiliser le lemme de convergence monotone !

Solution On pose $f(t, x) = e^{-t} t^{x-1} = e^{-t + (x-1) Logt}$. Fixons $0 < \alpha < M$. On a, pour $(t, x) \in]0, +\infty] \times]\alpha, M]$, $|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(t, x)| = |e^{-t} (\log t)^n t^{x-1}| \leq h_n(t)$, où $h_n(t) = e^{-t} |(\log t)^n| t^{\alpha - 1}$ si $0 < t \leq 1$ et $h_n(t) = e^{-t} |(\log t)^n| t^{M-1}$ si $t > 1$. Les fonctions $h_n(t)$ étant sommables sur $]0, \infty]$, on voit (pour $n = 0$) que Γ est bien définie, puis qu'on peut appliquer successivement à tous ordres le théorème de dérivation sous le signe somme à l'intégrale définissant $\Gamma(x)$. On obtient, pour tout $\alpha < x < M$,

$$\frac{\partial^n \Gamma}{\partial x^n}(t, x) = \int_0^\infty e^{-t} (\log t)^n t^{x-1} dt.$$

Comme α est arbitrairement petit et M arbitrairement grand, on conclut que $\Gamma(x)$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$. Quand $x \to 0$, le théorème de convergence monotone nous dit que

$$\Gamma(x) \geq \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt \to \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}dt = +\infty.$$

Remarque : on peut aussi montrer que $\Gamma(z)$ est holomorphe sur le demi-plan $Re(z) > 0$, c'est plus rapide.

Exercice 4.17. Soit f une fonction sommable. Démontrer que $\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha\lambda(\{x,\ |f(x)| \geq \alpha\}) = 0$.

Solution

On a

$$\alpha \int_{\{|f(x)|\geq\alpha\}} dx \leq \int_{\{|f(x)|\geq\alpha\}} |f(x)|dx = \int \chi_{\{|f(x)|\geq\alpha\}}(x)|f(x)|dx.$$

On remarque que $\mathbb{1}_{\{|f(x)|\geq\alpha\}}f(x) \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$, presque partout, et que $|\mathbb{1}_{\{|f(x)|\geq\alpha\}}f(x)| \leq |f(x)|$ qui est donc chapeau intégrable. Par le théorème de Lebesgue, on a donc

$$\int_{\{|f(x)|\geq\alpha\}} |f(x)|dx \to 0$$

Exercice 4.18. Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, montrer que $\tilde{f}(x) = \Sigma_{n\in\mathbb{Q}}f(x+n) \in \mathbb{L}^1([0,1])$ et que $\int_{[0,1]} \tilde{f}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

Solution

Par le théorème de la convergence monotone, on a

$$\int_0^1 \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|f(x+n)| = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+n)|dx = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx.$$

La série $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|f(x+n)|$ converge donc pour presque tout x et il en de même pour la série $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)$. Celle-ci a $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|f(x+n)|$ comme chapeau intégrable. Par le théorème de Lebesgue, elle est donc convergente dans $\mathbb{L}^1$ et obtient la formule demandée.

Exercice 4.19. *Un contre-exemple à méditer au théorème de dérivation sous le signe somme.* Soit ϕ une fonction continue sur $[0,1]$. On considère, dans $[0,1]\times[0,1]$ la fonction f définie par $f(x,\lambda) = \phi(x)$ si $x \leq \lambda$ et $f(x,\lambda) = 0$ sinon. On pose $F(\lambda) = \int_0^1 f(x,\lambda)dx$. Pour chaque λ, la dérivée partielle existe sauf en un point, et elle est majorée par une fonction sommable fixe : la fonction 0. Déterminer la dérivée de F.

Solution

On a $F(\lambda) = \int_0^1 f(x,\lambda)dx = \int_0^\lambda \phi(x)dx$. Donc $F'(\lambda) = \phi(\lambda)$. On voit que la conclusion du théorème de dérivation sous le signe somme est fausse. En effet, l'hypothèse b) est invalidée : $\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)$ n'existe pas en tout point de $A \times I = [0,1]\times[0,1]$, mais seulement en presque tout point.

Exercice 4.20. (**Inégalité de Hardy**, Chambert-Loir A., *Exercices d'analyse pour l'agrégation*)

Soit p un réel strictement supérieur à 1.

1) Soit $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$. On pose $F(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. Le but de la question est de montrer que F est dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ et que :

$$\left|\int_0^\infty |F(x)|^p dx\right| \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f^p(x)|dx$$

a) Etablir le résultat lorsque f est continue positive.

b) En déduire le résultat lorsque f est continue et de signe quelconque.

c) Traiter le cas général.

2) Montrer que cette constante est optimale (*ind. : on pourra utiliser des fonctions puissances).*

Solution

1) a) f étant continue, F est continue (y compris en 0, le vérifier) et dérivable sur $(0, +\infty)$ avec $(xF)^{'} = F + xF^{'} = f$. En écrivant que

$$F^p(x) = F^{p-1}(x)f(x) - xF^{p-1}(x)F^{'}(x)$$

et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^T F^p(x)dx = -\frac{T}{p-1}F^p(T) + \left(\frac{p}{p-1}\right)\int_0^T F^{p-1}(x)f(x)dx$$

(on vérifiera qu'il n'y a pas de problème en 0 en prenant l'intégrale entre ε et T et en faisant tendre ε vers 0). Or $-\dfrac{T}{p-1}F^p(T) \leq 0$ car f est supposée positive. En appliquant l'inégalité de Hölder dans la deuxième intégrale, on a

$$\int_0^T F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^T f^p(x)dx$$

b) On généralise l'inégalité précédente au cas où f est de signe quelconque en remarquant qu'alors

$$|F(x)| \leq G(x) = x^{-1}\int_0^x |f(t)|dt$$

et l'inégalité précédente est valable avec le couple $(|f|, G)$. On en déduit facilement l'inégalité pour (f, F).

c) On vient de montrer que l'application $T : f \in C_0 \to F \in \mathcal{L}^p$ était linéaire continue avec une norme inferieure à $p/(p-1)$. Puisque C^0 est dense dans $\mathcal{L}^p$, on a que pour tout $f \in \mathcal{L}^p$, il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues tendant en norme $\mathcal{L}^p$ vers f. Soit $F_n = T(f_n)$: $(F_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p$ donc elle converge vers une certaine fonction G. Par la "réciproque du théorème de Lebesgue", de la suite f_n on peut extraire une sous-suite qui converge simplement (et dans $\mathcal{L}^p$) vers f. On en déduit facilement que $F(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)dt = G(x)$ p.p. Donc F est dans $\mathcal{L}^p$ et vérifie l'inégalité de Hardy.

2) Facile.

Exercice 4.21. (Chambert-Loir A., *Exercices d'analyse pour l'agrégation*) Soit $a > 0$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{1/a}} \left(1 - \frac{x^a}{n}\right)^n dx$$

(*ind. : on pourra utiliser le théorème de convergence monotone*)

Solution

Soit $u > 0$. On considère la fonction $g_u(t) = t\log(1 - u/t)$ pour $t > u$. on a $g_u^{'}(t) = \log(1 - u/t) + u/(t - u)$ et $g_u^{''}(t) = -u^2/[t(t-u)^2] \leq 0$ et donc $g_u^{'}$ positive car $g_u^{'}(+\infty) = 0$. Donc $g_u(t)$ est une fonction croissante de $t > u$ et $t \in (u, +\infty) \to (1 - u/t)^t$ aussi. Il ne reste alors plus qu'à appliquer le théorème de convergence monotone et la limite cherchée est $\int_0^\infty \exp(-x^a)dx = a^{-1}\Gamma(a^{-1})$.

Exercice 4.22. (Chambert-Loir A., *Exercices d'analyse pour l'agrégation*) 1) Soit γ la constante d'Euler. Montrer que

$$\gamma = -\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{E(x)}\right) dx$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x. En déduire que $\gamma > 0$.

2) Montrer que $\gamma = \int_0^\infty e^{-s}\log(s)ds$.

Solution

1) Trivial.

2) On a

$$\int_0^k (1-s/k)^k \log(s)ds = \int_0^1 (1-s/k)^k \log(s)ds + \int_1^k (1-s/k)^k \log(s)ds$$

Quand k tend vers $+\infty$, la première intégrale tend grâce au théorème de convergence dominée vers $\int_0^1 e^{-s}\log(s)ds$ et la deuxième, grâce au théorème de convergence monotone (voir exercice précédent), vers $\int_1^\infty e^{-s}\log(s)ds$. On est donc ramené à l'étude de $\int_0^k (1-s/k)^k \log(s)ds$ qui après un changement de variables donne

$$k\int_0^1 (1-u)^k \log(u)du - \frac{k}{k+1}\log k = \int_0^1 kv^k \log(1-v)dv - \frac{k}{k+1}\log k$$

Or $\log(1-v) = \sum_{j=1}^\infty \dfrac{v^j}{j}$ d'où par le théorème de convergence monotone

$$\int_0^1 v^k \log(1-v)dv = \frac{k}{k+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k+1}\right)$$

On en déduit le résultat.

Exercice 4.23. (J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*)
Pour $z > 0$, $p, q > 0$, on définit les fonctions

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

Montrer que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Exercice 4.24. Rappels : un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^N$ est un ensemble contenu dans un borélien de $\mathbb{R}^N$ de mesure nulle. On ajoute à la tribu des boréliens les ensembles négligeables. On obtient ainsi la tribu de Lebesgue, notée $\mathcal{L}$.

1) Un ensemble est Lebesgue mesurable s'il diffère d'un borélien par un ensemble de mesure nulle.

2) On dira qu'une fonction est Lebesgue-mesurable si elle est mesurable de $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L})$ dans $\mathbb{R}, \mathbb{B}$ où $\mathbb{B}$ est la tribu de Borel. Une fonction est Lebesgue-mesurable si et seulement si elle est presque partout égale à une fonction borélienne.

Solution *1) Soit $\mathcal{L}$ la tribu de Lebesgue, i.e. la plus petite tribu contenant les boréliens et les ensembles négligeables. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des ensembles E qui diffèrent d'un borélien par un ensemble négligeable, i.e. $(E = B \cup N_1) \setminus N_2$ où B est un borélien et N_1, N_2 sont des ensembles négligeables. On a $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ et il suffit donc de vérifier que $\mathcal{E}$ est une tribu, ce qui va tout seul.*

2) Si f ne diffère de g borélienne que sur un ensemble négligeable N, les ensembles $[f \leq a]$ et $[g \leq a]$ ne diffèrent que d'un ensemble négligeable et donc $[f \leq a]$ est bien Lebesgue-mesurable. Donc f est Lebesgue-mesurable. Réciproquement, considérons la classe $\mathcal{H}$ des fonctions $\sigma(\mathcal{L})$-mesurables et la classe $\mathcal{J}$ des fonctions qui ne diffèrent d'une fonction borélienne que sur un ensemble de mesure nulle, et enfin l'ensemble $\mathcal{X}\mathcal{X}$ des fonctions caractéristiques d'ensembles Lebesgue-mesurables. On a par ce qui précède $\mathcal{X}\mathcal{X} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{H}$. On voit aisément que $\mathcal{J}$ est un espace vectoriel, qu'il contient 1 et est stable par limite croissante. En appliquant le théorème de la classe monotone, on déduit que $\mathcal{J}$ contient toutes les fonctions $\sigma(\mathcal{L})$-mesurables et donc $\mathcal{H}$. Donc $\mathcal{J} = \mathcal{H}$.

2) (solution constructive). Soit f une fonction mesurable au sens de Lebesgue. Soit

$$f_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k\varepsilon) \mathbb{1}_{\frac{k}{n} \leq f < \frac{(k+1)}{n}} = \mathbb{1}_{A_{k,n}}$$

Comme $A_{k,n}$ est Lebesgue-mesurable, il existe $B_{k,n}$ borélien tel que $\mu(A_{k,n} \Delta B_{k,n}) = 0$. Donc, presque partout, $f_n = \tilde{f}_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{k}{n}) \mathbb{1}_{B_{k,n}}$. Mais $f_n \to f$ presque partout. Donc $\tilde{f}_n \to f$ presque partout. Donc f est égale presque partout à la limite, borélienne, d'une suite de fonctions boréliennes.

5 Mesure Produit et théorème de Fubini

Soient $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces munis de leurs tribus respectives. On cherche à définir une notion de tribu produit sur $\Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega$ afin de définir la notion de mesure produit sur ce même espace. Soit

$$\rho_1 : \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \to \omega_1 \in \Omega_1 \text{ et } \rho_2 : \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \to \omega_2 \in \Omega_2$$

les deux projections canoniques.

Définition 5.1. *La tribu produit sur Ω, notée $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, est définie comme la tribu par les rectangles ou par ρ_1 et ρ_2,*

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\left(B_1 \times B_2\ ;\ B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\right) = \sigma\left(\rho_1^{-1}(\mathcal{F}_1), \rho_2^{-1}(\mathcal{F}_2)\right).$$

Remarque 5.1. *On remarquera que $\mathcal{I} = \{B_1 \times B_2\ ;\ B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\}$ est un π-système car $(B_1 \times B_2) \cap (C_1 \times C_2) = (B_1 \cap C_1) \times (B_2 \cap C_2)$.*

Si $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, ..., $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ sont des espaces munis de tribus, alors pour tout k,

$$\left(\otimes_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i\right) \otimes \left(\otimes_{i=k+1}^{n} \mathcal{F}_i\right) = \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i.$$

En d'autres termes le produit de tribus est associatif. En particulier : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Démonstration. En effet les tribus considérées sont engendrées respectivement par les π-systèmes $(\mathcal{I})^k$, $(\mathcal{I})^{n-k}$ et $(\mathcal{I})^n$. Le dernier est le produit cartésien des deux premiers car le produit cartésien est associatif. $\square$

5.1 Théorème de Fubini

On suppose que $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$, pour $i = 1, 2$, sont des espaces mesurés munis de mesures finies. On peut définir pour toute fonction $\mathcal{F}$-mesurable bornée ou positive f :

$$I_1^f(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\mu_2(d\omega_2), \ \ (\omega_1 \in \Omega_1)$$

et

$$I_2^f(\omega_2) = \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\mu_1(d\omega_1), \ \ (\omega_2 \in \Omega_2)$$

Théorème 5.1. ***(Théorème de Fubini)*** *Soient μ_1 et μ_2 des mesures finies*
1) Il existe une unique mesure finie μ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \ A_1 \in \mathcal{F}_1, \ A_2 \in \mathcal{F}_2$$

Elle est appelée mesure produit de μ_1 et μ_2 et notée $\mu_1 \otimes \mu_2$
2) Si f est une fonction $\mathcal{F}$ -mesurable positive alors :

$$\int f d\mu = \int_{\Omega_1} I_f^1(\omega_1)\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} I_f^2(\omega_2)\mu_2(d\omega_2) \qquad (\star)$$

3) Si f est $\mathcal{F}$-mesurable et si $\int |f|\mu < +\infty$ alors $(\star)$ est encore valable.

On peut étendre ce résultat à des mesures σ finies par les arguments classiques de limite croissante.

Démonstration. 1) Pas pratique en fait avec Carathéodory à cause de l'additivité dénombrababilité à prouver. Le fait que μ défini par

$$\mu(F) = \int_{\Omega_1} I_1^f(w_1)\mu_1(d\omega_1), \qquad \text{avec } f = \mathbb{1}_F,$$

soit une mesure provient de la linéarité de l'intégrale et du théorème de convergence monotone. En fait, la question délicate dans ce théorème concerne les problèmes de mesurabilité (à traiter avant).
L'unicité est une simple conséquence du théorème de Dynkin (ou plutot d'unicité du prolongement) avec comme π système les ensembles produits.

2) Les deux égalités proviennent du théorème de linéarité puis la classe monotone (on sait en effet qu'elle sont vraies pour les indicatrices d'éléments de $\mathcal{F}$). On a donc le résultat pour les fonctions $\mathcal{F}$-mesurables bornées. Si f est une fonction $\mathcal{F}$-mesurable positive, en considérant la suite de fonctions bornées $(f \wedge n)_n$ et en appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient 2). On peut aussi appliquer le théorème de la classe monotone.

3) Il suffit comme d'habitude de décomposer la fonction f en la différence de sa partie positive f^+ et de sa partie négative f^-.
□

Un contrexemple à Fubini si f n'est pas sommable : (Voir Td ou Durrett R., *Probability : Theory and examples*, p 472) :

Soit $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. Vérifier que :

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x, y)dydx > 0, \int_1^\infty \int_0^1 f(x, y)dxdy < 0$$

Remarque 5.2. *1) Tout ce qui précède s'étend sans peine si au lieu de considérer des mesures finies, on prend des mesures σ-finies mais pas au-delà (contre-exemple dans Williams). La conclusion 2) du théorème de Fubini s'obtient par simple convergence monotone et la conclusion 3) par le théorème de Lebesgue.*
2) D'autre part, au lieu de considérer deux espaces, on peut très bien en considérer un nombre fini arbitraire n : $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)_{i=1\ldots n}$. La tribu produit $\otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ est définie comme la tribu engendrée par les $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, les projections canoniques de Ω sur $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. Cette tribu produit est générée par le π-système $\{A_1 \times \ldots \times A_n; A_i \in \mathcal{F}_i\}$.
3) On remarquera que pour aboutir au théorème de Fubini, on a utilisé de manière fréquente le théorème de la classe monotone. Il est en fait très difficile de définir les mesures produits sans y avoir recours d'une manière ou d'une autre. En particulier, la "machine standard" ne fonctionne pas alors que la plupart du temps où l'on utilise le théorème de la classe monotone, un argument "machine standard" peut être utilisé.

5.2 Exercices

Exercice 5.1. Calcul de l'intégrale de Gauss
Démontrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
Solution : Classique ! On prendra le carré de cette intégrale qu'on calculera en utilisant Fubini sur $\mathbb{R}^2$ et le théorème de changement de variables en coordonnées polaires.

Exercice 5.2. Propriétés de la convolution

1) Si f et g appartiennent à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g$ définie par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

aussi (vérifier que la définition a un sens !), et $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$. (Application directe du théorème de Fubini.) Montrer que $f * g = g * f$ et que $(f * g) * h = f * (g * h)$.

2) On appelle $\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{L}^1$ sur tout borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, et si $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est nulle en dehors d'un borné, alors on peut définir $f * g$ et $f * g \in \mathbb{L}^1_{loc}$.

3) On suppose que $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $f * g$ définie par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

existe pour presque tout x, appartient à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

4) On suppose maintenant que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ avec p et q des exposants conjugués. Montrer que $f * g$ est uniformément continue et que si $1 < p < \infty$ alors $h = f * g$ est continue, nulle à l'infinie. Donner un contre-exemple dans le cas $p = 1$.

5) Si $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$, alors $f * \varphi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ et,

$$\forall |\alpha| \leq m, \quad \partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi.$$

Solution : Applications directes du théorème de Fubini et du théorème de dérivation sous le signe somme. Le seul point un peu délicat est le 3). On mène le calcul en supposant f et g positives puisqu'on peut toujours remplacer f par $|f|$ et g par $|g|$. On a

$$\int |f * g|^p dx = \int \left(\int f(y)g(x-y)dy \right)^p dx.$$

Or par l'inégalité de Hölder,

$$\int f(y)g(x-y) = \int f(y)^{\frac{1}{p}} g(x-y) f^{\frac{p-1}{p}}(y) \leq \left(\int f(y)g(x-y)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int f(y) \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Donc par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int\left(\int f(y)g(x-y)\right)^p &\leq \int\left(\int f(y)g(x-y)^p dy\right)\left(\int f(y)dy\right)^{p-1} dx\\ &\leq \int f(y)dy\int g(x)^p dx\left(\int f(y)\right)^{p-1}\\ &\leq \left(\int f(y)dy\right)^p\left(\int g(x)^p dx\right).\end{aligned}$$

Cela donne $||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}$.

Exercice 5.3. Contrexemples pour le thèorème de Fubini, Durrett R., Probability : Theory and examples, pp. 471-473

1) On considère la mesure de comptage sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. On pose pour $m \geq 1$, $f(m,m) = 1$ et $f(m+1,m) = -1$, on pose sinon $f(m,n) = 0$. Vérifier que

$$\sum_m\sum_n f(m,n) = 1, \quad \text{mais que } \sum_n\sum_m f(m,n) = 0.$$

Quelle est l'hypothèse du théorème de Fubini qui n'est pas vérifiée ?

2) On considère sur $[0,1]\times[1,+\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue, $f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. Montrer que

$$\int_0^1\int_1^\infty f(x,y)dydx = \int_0^1 x^{-1}(e^{-x} - e^{-2x})dx > 0$$

et

$$\int_1^\infty\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_1^\infty y^{-1}(e^{-2y} - e^{-y})dy < 0.$$

Quelle est l'hypothèse du théorème de Fubini qui n'est pas vérifiée ?

3) Soit $X = [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $Y = [0,1]$ muni de la tribu des parties et de la mesure de comptage, μ. On pose $f(x,y) = 1$ si $x = y$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Montrer que

$$\int_X\int_Y f(x,y)\mu(dy)\lambda(dx) = 1 \text{ et } \int_Y\int_X f(x,y)\lambda(dx)\mu(dy) = 0.$$

Vérifier que f est bien mesurable pour la mesure produit. Quelle est l'hypothèse du théorème de Fubini qui n'est pas vérifiée ?

Solution : Dans la première question, c'est l'hypothèse que f soit sommable qui n'est pas vérifiée. Dans la seconde, aussi, car si f était sommable, l'ordre d'intégration serait indifférent. Dans la troisième, la fonction f est bien bornée, mesurable et sommable, mais la seconde mesure n'est pas σ-finie.

Exercice 5.4. On admet que l'on peut ordonner les réels de $[0,1]$ par une relation d'ordre total $<'$ de telle manière que $\forall x \in [0,1]$, $\{y,\ y <' x\}$ soit un ensemble dénombrable.
(Cette propriété s'appelle l'hypothèse du continu. Il a été démontré par Kurt Gödel qu'elle ne contredisait par les axiomes classiques de la théorie des ensembles et par Paul Cohen que son contraire ne les contredisait pas non plus.)
On pose $X = Y = [0,1]$, munis de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. On pose $f(x,y) = 1$ si $x <' y$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Montrer que

$$\forall x \quad \int_X f(x,y)dx = 0, \quad \text{et } \forall y \quad \int_Y f(x,y)dy = 1.$$

Quelle est l'hypothèse du théorème de Fubini qui n'est pas vérifiée ?

Solution : Toutes les hypothèses du théorème de Fubini sont vérifiées, ... sauf une, la mesurabilité de f.

Exercice 5.5. Application directe du théorème de Fubini : Durrett R., Probability : Theory and examples, p. 473

Soit $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage et $(Y,\ \mathcal{T},\ \mu)$ un espace mesurable de mesure σ-finie. Si les fonctions f_n sont $\mathcal{T}$-mesurables et si $\sum_n \int |f_n|\mu < \infty$, alors

$$\sum_n \int f_n\mu = \int \sum_n f_n\mu.$$

Exercice 5.6. Application directe du théorème de Fubini, Durrett R., Probability : Theory and examples p. 473. Soit $g \geq 0$ mesurable sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_X g\mu = (\mu \otimes \lambda)(\{(x,y),\ 0 \leq y < g(x)\}) = \int_0^\infty \mu(\{x,\ g(x) > y\})dy.$$

(Vérifier que $\{(x,y),\ 0 \leq y < g(x)\}$ est mesurable en remarquant que $(x,y) \to (g(x),y)$ mesurable et que $(a,b) \to b-a$ aussi.)

Exercice 5.7. Application 3 du théorème de Fubini, Durrett R., Probability : Theory and examples, p. 473. Soit μ une mesure finie sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \mu(]-\infty, x])$. Montrer que

$$\int (F(x+c) - F(x))dx = c\mu(\mathbb{R}).$$

Exercice 5.8. Exercice 8.1 page 29 de Ouvrard Tome II (calculs de densités de v.a.)

6 Compléments

6.1 Mesures de Borel

Pour cette section, on se reportera au chapitre 2 *du livre de Rudin* Analyse réelle et complexe. *On suppose ici que Ω est un espace topologique séparé localement compact et $\mathcal{F}$ est la tribu des boréliens sur Ω.*

Définition 6.1. *Une mesure (complexe ou positive) μ définie sur la tribu des boréliens $\mathcal{F}$ d'un espace Ω séparé localement compact est appelée une mesure borélienne sur Ω.*

Une mesure de Borel positive sera dite régulière si elle satisfait :
1. $\forall E \in \mathcal{F}, \mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$.
2. $\forall E \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(E) < +\infty, \mu(E) = \inf\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}$.

On dira de même d'une mesure complexe qu'elle est régulière si sa variation totale $|\mu|$ qui est une mesure positive est régulière.

On énonce maintenant le théorème de représentation de Riesz tel qu'on le trouve dans [**?**] *dans le chapitre sur les mesures complexes et le chapitre sur les mesures de Borel positive. Il est relativement général. Sa démonstration nécessite des préliminaires topologiques longs. Ce théorème anticipe sur la suite puisqu'il fait appel à la notion d'intégrale relativement à une mesure mais on supposera que le lecteur est familier avec la théorie de l'intégration relativement à une mesure complexe ou tout du moins relativement à une mesure signée.*

On note C_c l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact et C_0 l'espace des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$ s'annulant à l'infini que l'on munit de la norme uniforme. C_c est dense dans C_0 pour la norme uniforme. Le théorème de représentation de Riesz caractérise toutes les formes linéires positives (non *nécessairement bornées) et les formes linéaires bornées sur C_c muni de la topologie de la convergence uniforme. Bien entendu, toute forme linéaire bornée sur C_c se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur C_0.*

Théorème 6.1. ***(de représentation de Riesz)***
1. Soit Φ une forme linéaire positive sur C_c. Il existe une unique mesure positive borélienne régulière μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

$$\Phi(f) = \int_\Omega f d\mu, \quad (f \in C_c)$$

2. Soit Φ une forme linéaire bornée sur C_0. Il existe une unique mesure de Borel μ complexe régulière telle que

$$\Phi(f) = \int_\Omega f d\mu, \quad (f \in C_0)$$

De plus, $\|\Phi\| = |\mu|(\Omega)$

6.2 Absolue continuité

Là aussi, nous anticipons en supposant connue la notion d'intégrale relativement à une mesure. $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable quelconque.

Définition 6.2. *Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{F}$ et λ une mesure quelconque sur $\mathcal{F}$, positive ou complexe. On dit que λ est absolument continue par rapport à μ et on note $\lambda \ll \mu$ si*

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(E) = 0$$

A l'opposé de cette notion existe celle de mesures mutuellement singulières.

Définition 6.3. *Soit λ et μ deux mesures quelconques (positives ou complexes). On dit qu'elles sont mutuellement singulières (et on note $\lambda \perp \mu$) s'il existe deux ensembles mesurables disjoints A et B tels que pour tout $E \in \mathcal{F}$,*

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A), \quad et \;\; \mu(E) = \mu(E \cap B)$$

On a le théorème de Radon-Nikodym dont une partie peut être démontrée via les martingales (voir TD).

Théorème 6.2. *Soit λ et μ deux mesures positives bornées sur la tribu $(\Omega, \mathcal{F})$.*
1. Il existe un couple unique de mesures λ_a et λ_s tel que

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \; \lambda_a \ll \mu, \; \lambda_s \perp \mu$$

2. Ces mesures sont positives bornées et $\lambda_a \perp \lambda_s$.
3. Il existe un unique $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tel que

$$d\lambda_a = h d\mu$$

Le couple (λ_a, λ_s) s'appelle la décomposition de Lebesgue de λ relativement à μ.

L'idée de la preuve de ce théorème repose essentiellement sur le théorème de représentation de Riesz des applications linéaires continues dans les espaces de Hilbert. La preuve n'est pas très longue.
Le théorème précédent reste encore vrai dans le cas d'une mesure μ positive σ-finie et d'une mesure complexe (donc bornée). Dans le cas enfin λ, μ positives et σ-finies, la majeure partie du théorème reste valable mais on a plus $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (on a seulement $\mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$). En revanche, s'il n'y a plus d'hypothès de σ-finitude, on ne peut plus rien dire (cf. [Rudin, Analyse réelle et complexe] pour un contre exemple).