Loi des grands nombres, Théorème central limite, Grandes déviations

1 Lois des grands nombres

Dans ce chapitre, on donne plusieurs variantes de la loi des grands nombres parmi les plus classiques et les plus simples.

Loi faible des grands nombres

Le premier théorème important et très simple à montrer est la loi faible des grands nombres.

Théorème 1.1. *Soit un suite de variables aléatoires indépendantes X_i d'espérance commune $\mathbb{E}(X)$, $i = 1, \dots, n, \dots$ et $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Alors $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \to 0$ quand $n \to \infty$.*

En effet par l'inegalité de Markov,dans le cas L^2 la preuve est facile :

$$\mathbb{P}(n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X)) \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}([\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X))]^2}{n^2\epsilon^2} = \frac{\mathbb{E}([X_i - \mathbb{E}(X)]^2}{n\epsilon^2}$$

qui tend vers zéro quand $n \to \infty$.

La loi forte

Le second théorème à retenir est le suivant :

Théorème 1.2. *Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et intégrables d'espérance μ. Soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles des $(X_i)_i$. Alors*

$$n^{-1}S_n \longrightarrow \mu \quad \mathbb{P} \text{ p.s. et dans } \mathbb{L}^1$$

Exercice 1.1. Lemme de Kronecker (Williams, *Probability with martingales*, p. 117)
Soit $(b_n)_n$ une suite de réels strictement positifs croissante et tendant vers l'infini. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels et définissons $s_n = x_1 + \dots x_n$. On a alors :

$$\sum_n \frac{x_n}{b_n} \quad \text{converge} \quad \Rightarrow \frac{s_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1) Montrer d'abord le lemme de Césaro : si b_n est comme ci-dessus et $v_n \to v_\infty$, alors (en posant $b_0 = 0$) :

$$\frac{1}{b_n}\sum_1^n (b_k - b_{k-1})v_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_\infty.$$

2) Démontrer le lemme de Kronecker.

Solutions : 1) fixer $\varepsilon > 0$ et N tel que $v_k \geq v_\infty - \varepsilon$ pour $k \geq N$. Montrer en coupant la somme en deux que $\liminf_n \frac{1}{b_n} \sum_1^n (b_k - b_{k-1}) v_k \geq 0 + v_\infty - \varepsilon$.
2) soit $u_n := \sum_{k \leq n} (\frac{x_k}{b_k})$. Par hypothèse, $u_\infty = \lim u_n$ existe et on a $u_n - u_{n-1} = \frac{x_n}{b_n}$. Ecrire $s_n = \sum_1^n b_k(u_k - u_{k-1}) = u_n b_n - u_0 b_1 - \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) u_k$ et déduire du lemme de Césaro que $\frac{s_n}{b_n} \to 0$.

Exercice 1.2. Très facile ! ! Loi forte des grands nombres avec moment d'ordre 4 borné, (Williams, p. 72)
Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes telles qu'il existe une constante $K > 0$ vérifiant :

$$\mathbb{E}(X_k) = 0, \quad \mathbb{E}(X_k^4) \leq K$$

Soit $S_n = X_1 + \ldots X_n$. Alors

$$\mathbb{P}(n^{-1} S_n \longrightarrow 0) = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \text{ dans } \mathbb{L}^4$$

1) Vérifier que $\mathbb{E}(X_i^2)$ et $\mathbb{E}(X_i^3)$ ont un sens. Montrer que

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}\big(\sum_k X_k^4 + 6 \sum_{i<j} X_i^2 X_j^2 \big)$$

En utilisant $\mathbb{E}(X_i^2)^2 \leq \mathbb{E}(X_i^4)$ (le montrer), en déduire que

$$\mathbb{E}(S_n^4) \leq nK + 3n(n-1)K \leq 3Kn^2.$$

2) Montrer que $\mathbb{E}(\sum_n (\frac{S_n}{n})^4) \leq 3K \sum_n n^{-2}$ et conclure.

Solutions : 1) Utiliser Jensen ou Holder.
2) $\mathbb{E}(\sum_n (S_n/n)^4) < \infty$ implique $\sum_n ((S_n/n)^4) < \infty$ p.s. donc $(S_n/n)^4 \to 0$ p.s. quand $n \to \infty$.

Exercice 1.3. Très général et pratique : la loi forte des grands nombres avec v.a. non-corrélées, pas nécessairement indépendantes, Brémaud P., *An Introduction to Probabilistic Modeling*, p. 228).
Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires identiquement distribuées. Supposons que leur moyenne $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ soit définie et qu'elles aient une variance finie σ^2. Supposons de plus qu'elles soient non corrélées, c'est-à-dire :

$$i \neq j \Longrightarrow \mathbb{E}\left[(X_i - \mu)(X_j - \mu)\right] = 0$$

Soit $S_n = X_1 + \ldots X_n$. Alors

$$\mathbb{P}(n^{-1} S_n \longrightarrow \mu) = 1$$

1) Montrer que l'on peut se ramener au cas $\mu = 0$.

2) On pose $Z_m = \sup_{1 \leq k \leq 2m+1} |X_{m^2+1} + \ldots + X_{m^2+k}|$. Montrer qu'il suffit de montrer

$$\mathbb{P} \; p.s., \; \lim_{m \to +\infty} \frac{S_{m^2}}{m^2} = 0, \tag{1.1}$$

$$\mathbb{P}\ p.s., \lim_{m\to+\infty} \frac{Z_m}{m^2} = 0 \tag{1.2}$$

3) Montrer que $\mathbb{P}\left(|S_{m^2}/m^2| \geq \epsilon\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{m^2\epsilon^2}$. En déduire, en utilisant le lemme de Borel-Cantelli, l'assertion (1.1).

4) On définit $\zeta_k^{(m)} = X_{m^2+1} + \ldots + X_{m^2+k}$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{Z_m}{m^2} \geq \epsilon\right) \leq \sum_{k=1}^{2m+1} \mathbb{P}\left(|\zeta_k^m| \geq m^2\epsilon\right).$$

Montrer que $\mathbb{P}(|\zeta_k^{(m)}| \geq m^2\varepsilon) \leq \frac{(2m+1)\sigma^2}{m^4\varepsilon^2}$. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, en déduire l'assertion (1.2) et conclure.

Indications : 2) On considérera l'entier $m(n)$ tel que $m(n)^2 \leq n \leq (m(n)+1)^2$ et on remarquera que

$$|\frac{S_n}{n}| \leq |\frac{S_{m(n)^2}}{m(n)^2}| + |\frac{Z_{m(n)}}{m(n)^2}|.$$

Exercice 1.4. Inégalité de Kolmogorov, (Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, tome 1, p 234-235)
0n reverra cette inégalité quand on traitera les martingales. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes centrées. On pose $S_n = X_1 + \ldots X_n$ et s_k^2 la variance de S_k. On a l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(\exists k \in \{1 \ldots n\}, |S_k| \geq ts_n) \leq t^{-2}.$$

On pose pour $\nu \in \{1 \ldots n\}$, $Y_\nu = 1_{|S_\nu| \geq ts_n} 1_{\{|S_k| < ts_n \text{ pour } k=1,\ldots,\nu-1\}}$.

1) Montrer que $Y_1 + \ldots Y_n = 1_{\{\exists k \in \{1 \ldots n\},\ |S_k| \geq ts_n\}}$.

2) Montrer que $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k S_n^2) \leq s_n^2$.

3) On pose $U_k = S_n - S_k$. En remarquant que U_k est indépendant de $Y_k S_k$, montrer que

$$\mathbb{E}(Y_k S_n^2) \geq \mathbb{E}(Y_k S_k^2)$$

4) Montrer que $Y_k S_k^2 \geq t^2 s_n^2 Y_k$ et déduire de 2) et 3) le résultat annoncé.

Solutions :

1) En effet, les évènements $Y_\nu = 1$ sont disjoints et leur union est bien l'évènement qui nous intéresse.

2) En effet, $\sum_{k=1}^n Y_k \leq 1$. Il suffit de multiplier par S_n^2 et de prendre l'espérance.

3) $\mathbb{E}(Y_k S_n^2) = \mathbb{E}(Y_k(S_k + U_k)^2) = \mathbb{E}(Y_k S_k^2) + 2\mathbb{E}(Y_k S_k U_k) + \mathbb{E}(Y_k U_k^2)$. Le deuxième terme est nul par l'indépendance mentionnée et le troisième terme est positif.

4) L'inégalité demandée est une conséquence immédiate de la définition de Y_k. En utilisant successivement cette dernière inégalité, puis celle de 3) et finalement celle de 2), on a

$$\mathbb{P}(\exists k \in \{1, \dots,\ n\}\ |S_k| \geq tS_n) = \mathbb{E}(Y_1 + \dots\ + Y_n) \leq \frac{1}{t^2 s_n^2}\mathbb{E}(\sum_k Y_k S_k^2)$$

$$\leq \frac{1}{t^2 s_n^2}\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} Y_k S_n^2) \leq t^{-2}.$$

Exercice 1.5. Loi forte des grands nombres avec une contrainte sur la variance (Feller, tome 2). Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes centrées ayant des variances $\sigma_n^2 = Var(W_n)$ telles que :

$$\sum_n \frac{\sigma_n^2}{n^2} < +\infty$$

On veut prouver que $\mathbb{P}$ $p.s.$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n W_k = 0$ On pose $X_n = W_n/n$ qui sont centrées et telles que :

$$\sum_n Var(X_n) < +\infty$$

et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1) Montrer que pour établir le résultat il suffit de prouver que S_n converge p.s.

2) On va montrer S_n converge p.s.

2a) Montrer qu'il suffit de prouver que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n_0\to+\infty} \mathbb{P}(\exists\ m, n \geq n_0,\ |S_m - S_n| > \epsilon) = 0$$

2b) Montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(\exists\ k \in \{n_0 \dots m\}, |S_{n_0} - S_k| > \epsilon/2) \geq \mathbb{P}(\exists\ m, n \geq n_0, |S_m - S_n| > \epsilon)$$

2c) Utiliser l'inégalité de Kolmogorov et conclure.

Solutions : 1) Utiliser le lemme de Kronecker.
2a) Supposons que l'on ait démontré que pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{n_0\to+\infty} \mathbb{P}(\exists\ m, n \geq n_0,\ |S_m - S_n| > \epsilon) = 0$$

On a :

$$\mathbb{P}(\{\exists \epsilon > 0,\ \forall n_0\ ,\ \exists m, n \geq n_0\ ,\ |S_m - S_n| > \epsilon\}) \leq \sum_{\epsilon\in\mathbb{Q}^+} \mathbb{P}(\{\forall n_0\ ,\ \exists m, n \geq n_0\ ,\ |S_m - S_n| > \epsilon\})$$

et par le critère de Cauchy, il suffit donc de montrer que pour $\epsilon > 0$ fixé,

$$\mathbb{P}(\{\forall n_0\ ,\ \exists m, n \geq n_0\ ,\ |S_m - S_n| > \epsilon\}) = 0$$

Ce dernier terme s'écrit $\mathbb{P}(\bigcap_{n_0} A_{n_0})$ où les $A_{n_0} = \{\exists m, n \geq n_0\ ,\ |S_m - S_n| > \epsilon\}$ sont décroissants. D'où :

$$\mathbb{P}(\{\forall n_0\ ,\ \exists m, n \geq n_0\ ,\ |S_m - S_n| > \epsilon\}) = \lim_{n_0 \to +\infty} \mathbb{P}(A_{n_0}) = 0 \quad \textit{par hypothèse.}$$

2b) On remarque aisément en utilisant l'inégalité triangulaire que :

$$A_{n_0} \subset \bigcup_{m \geq n_0} \{|S_m - S_{n_0}| > \epsilon/2\}$$

Or

$$\bigcup_{m \geq n_0} \{|S_m - S_{n_0}| > \epsilon/2\} = \bigcup_{m \geq n_0} \bigcup_{m \geq k \geq n_0} \{|S_k - S_{n_0}| > \epsilon/2\}$$

Et les événements $B_m = \bigcup_{m \geq k \geq n_0} \{|S_k - S_{n_0}| > \epsilon/2\}$ sont croissants. D'où 2b).

2c) En appliquant soigneusement l'inégalité de Kolmogorov, on a :

$$\mathbb{P}(\exists\ k \in \{n_0 \dots m\}, |S_{n_0} - S_k| > \epsilon/2) \leq \frac{4Var(X_{n_0+1} + \dots + X_m)}{\epsilon^2}$$

Le terme de droite s'écrit en raison de l'indépendance des X_k,

$$\frac{4}{\epsilon^2} \sum_{k=n_0+1}^{m} Var(X_k)$$

Prenant la limite quand m tend vers l'infini puis la limite quand n_0 tend vers l'infini, le résultat tombe.

Exercice 1.6. Lemme de troncature de Kolmogorov (Williams, 12.9 p. 118)
Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées ayant la même loi que X et intégrables. Soit $\mu = \mathbb{E}(X)$. On définit :

$$Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n}$$

Alors :
i) $\mathbb{E}(Y_n) \to \mu$
ii) $\mathbb{P}(X_n = Y_n \quad \text{sauf pour un nombre fini de } n\ ) = 1$
iii) $\sum_n \left(Var(Y_n)/n^2\right) < +\infty$
On pose $Z_n = X \mathbb{1}_{|X| \leq n}$. Montrer que la loi de Z_n est la même que cellle de Y_n.

1) Démontrer i).

2) Montrer que $\sum_n \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) < +\infty$ et en déduire ii).

3) Montrer que $\sum_n \left(Var(Y_n)/n^2\right) \leq \mathbb{E}(|X|^2 f(|X|))$ où $f(z) = \sum_{n \geq \sup(1,z)} 1/n^2$. Prouver que $f(z) \leq 2/\sup(1, z)$ et en déduire iii).

Solutions : 1) On pose $Z_n = 1_{\{|X|\leq n\}}X$ qui est majorée en valeur absolue par $|X|$ intégrable et qui tend $\mathbb{P}$ presque sûrement vers X. Le théorème de convergence dominée donne le résultat.

2) $\sum_n \mathbb{P}(Y_n \neq X_n) = \sum_n \mathbb{P}(|X_n| > n) = \sum_n \mathbb{P}(|X| > n)$. Or on a :

$$\sum_n \mathbb{P}(|X| > n) = \mathbb{E}\left(\sum_n 1_{\{|X|>n\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n<|X|} 1\right) \leq \mathbb{E}(|X|) < +\infty$$

Par le lemme de Borel-Cantelli 1, on obtient ii).

3) Il suffit d'écrire que

$$\sum_n \frac{Var(Y_n)}{n^2} \leq \sum_n \frac{\mathbb{E}\left(|X|^2; |X| < n\right)}{n^2} = \mathbb{E}(|X|^2 f(|X|)$$

L'inégalité concernant f se montre facilement et on obtient donc

$$\sum_n \frac{Var(Y_n)}{n^2} \leq 2\mathbb{E}(|X|).$$

Exercice 1.7. Loi forte des grands nombres : démonstration via les troncatures (Williams)
Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et inrégrables d'espérance μ. Alors

$$\mathbb{P}(n^{-1}S_n \longrightarrow \mu) = 1$$

Cette démonstration se fait au moyen de deux ingrédients : le lemme de troncature de Kolmogorov et une loi forte sous contrainte de variance. Démontrer le théorème.

Solutions :
On pose $Y_n = 1_{\{|X_n|\leq n\}}X_n$. D'après le ii) du lemme de troncature, $Y_n = X_n$ sauf pour un nombre fini de n d'où, $\mathbb{P}$ presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \right\} = 0$$

Il nous reste donc à montrer que $\mathbb{P}$ presque sûrement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \mu$$

Or

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k$$

où $W_k = Y_k - \mathbb{E}(Y_k)$.
Mais par le i) du lemme de troncature de Kolmogorov,

$$\mathbb{E}(Y_k) \to \mu$$

et par le théorème de Césaro,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = \mu$$

Quant au deuxième terme, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k$*, il se traite grâce à la loi forte des grand nombres avec une contrainte sur la variance. En effet, les* W_k *sont i.i.d. centrées et leurs variances sont données par* $Var(W_k) = Var(Y_k)$*. Par iii) du lemme de troncature de Kolmogorov et la loi des grands nombres avec contrainte sur la variance, on conclut.*

Exercice 1.8. La démonstration d'Etemadi (1981). Nous donnons cette démonstration sous la forme élégante proposée par S.R.S. Varadhan, *Probability Theory*, p. 66-67).

1) Lire attentivement les sept inégalités et égalités de la page 66 et les justifier.

2) Lire attentivement. Remarquer que le haut de la page 67 est le lemme de troncature de Kolmogorov.

Exercice 1.9. On rappelle le théorème de Sheffé : *Si une suite de variables aléatoires* $(X_n)_n \in \mathbb{L}^1$ *vérifie* $X_n \geq 0$, $X_n \to X$ *presque sûrement,* $X \in \mathbb{L}^1$ *et* $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$*, alors* $X_n \to X$ *dans* $\mathbb{L}^1$. Soit $(X_n)_n$ une suite i.i.d. de variables aléatoires intégrables. Montrer que $(S_n)_n = \left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_n$ converge dans $\mathbb{L}^1$ vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Solutions :
Si Z *est une variable aléatoire, on note* $Z^+ = \sup(Z, 0)$ *sa partie positive et* $Z^- = \sup(-Z, 0)$ *sa partie négative si bien que* $Z = Z^+ - Z^-$*. On considère les variables aléatoires i.i.d. intégrables* $(X_n^+)_n$ *d'espérance* $\mathbb{E}(X_1^+)$ *et on forme la suite* $(S_{n,+})_n$ *définie par*

$$S_{n,+} = n^{-1}\left(X_1^+ + \ldots + X_n^+\right)$$

On sait que $\mathbb{P}$ *p.s., la suite* $(S_{n,+})_n$ *converge vers* $\mathbb{E}(X_1^+)$ *et d'autre part, on a* $\mathbb{E}(S_{n,+}) = \mathbb{E}(X_1^+)$ *donc par le théorème de Sheffé, on a que la convergence de* $(S_{n,+})_n$ *vers la constante* $\mathbb{E}(X_1^+)$ *a lieu dans* $\mathbb{L}^1$*. De même, en considérant* $(X_n^-)_n$*, et* $S_{n,-} = n^{-1}(X_1^- + \ldots + X_n^-)$*, on a la convergence de* $(S_{n,-})_n$ *vers* $\mathbb{E}(X_1^-)$*. Vu que* $S_n = S_{n,+} - S_{n,-}$ *pour tout* n*, on en déduit immédiatement le résultat.*

Remarque 1.1. *1. Nous n'avons pas énoncé le théorème des trois séries de Kolmogorov, que l'on pourra trouver dans Williams par exemple. Il est d'usage d'en parler lorsqu'on traite la loi des grands nombres mais il en est indépendant (même si les techniques sont les mêmes).*
2. On pourra consulter Feller, tome 1, pp. 243-263, et surtout les exercices pour des généralisations de la loi des grands nombres. Il sera aussi bon de s'intéresser au théorème ergodique qui est une généralisation de la loi des grans nombres pour les processus stationnaires (Grimmett Stirzacker).
3. La loi des grands nombres est énormément utilisé en statistique (pour construire des estimateurs par exemple), d'un point de vue numérique pour estimer des intégrales (méthode de Monte Carlo)...

1.1 La preuve la plus rapide de la loi forte des grands nombres

(V. S. Borkar, Probability Theory, Springer, 1995, pages 66-67).

La loi des grands nombres est justifiée par Vivek Borkar de la manière suivante : "Observez que des variables aléatoires de carré intégrable et de moyenne zéro sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ forment un espace vectoriel avec produit scalaire $\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}[XY]$. Mais si on ajoute des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans cet espace, c'est la même chose que d'ajouter n vecteurs orthogonaux de même longueur. Donc la moyenne arithmétique de ces vecteurs doit être d'ordre $n^{-\frac{1}{2}}$." C'est exactement la ligne de raisonnement que suit la loi faible des grands nombres, qui suppose les variables aléatoires de variance bornée. La loi forte précise la loi faible. Sa démonstration très détaillée suivant la ligne de Kolmogorov consiste a tronquer les variables X_n pour que leurs variances soient contrôlées et que l'on puisse appliquer un argument hilbertien du même type que pour la loi faible. Ensuite, on montre que la différence entre X_n et sa troncature Y_n est asymptotiquement négligeable par le lemme de Borel-Cantelli. La preuve d'Etemadi suit toujours cette démarche, mais de manière particulièrement heureuse, en peu de lignes.

Théorème 1.3. *Soient X_n, $n \geq 1$, intégrables,* indépendantes deux à deux *et identiquement distribuées et $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$. Alors*

$$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 \ p.s..$$

Démonstration. Cette preuve est due à Etemadi. Comme X_n^+ et X_n^- vérifient les mêmes hypothèses du théorème on montre tout avec $X_i \geq 0$. Soit $Y_i := X_i \mathbb{1}_{X_i \leq i}$ et $S_n^* := \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $n \geq 1$. Soient $\varepsilon > 0$, $\alpha > 1$ et $k_n := [\alpha^n]$ la partie entière de α^n. Dans tout ce qui suit C désigne une constante positive variant d'étape en étape. Soit $\mu := \mathbb{P}_{X_i}$ la loi de X_i. On note $\sigma^2(X)$ la variance de X. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{k_n}^* - \mathbb{E}[S_{k_n}^*]}{k_n}\right|\right) &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(S_{k_n}^*)}{k_n^2} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2(Y_i) \\
&\leq C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_i^2]}{i^2} = C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \int_0^i x^2 \mu(dx) \\
&= C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{k=0}^{i-1} \int_k^{k+1} x^2 \mu(dx) \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} x^2 \mu(dx) \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} x \mu(dx) = C\mathbb{E}X_1 < \infty.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\mathbb{E}X_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}S_{k_n}^*}{k_n}.$$

Donc par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\frac{S_{k_n}^*}{k_n} \to EX_i \text{ p.s.}$$

Mais

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \neq X_n) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} \mu(dx) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \int_i^{i+1} \mu(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} i \int_i^{i+1} \mu(dx) \\
\leq & \; EX_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Par Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(X_n \neq Y_n \text{ i.o.}) = 0$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{k_n}}{k_n} = \mathbb{E}X_1 \text{ p.s.}$$

Pour $n \geq 1$ soit $m(n) \geq 0$ tel que $k_{m(n)} \leq n \leq k_{m(n)+1}$. Comme $n \to S_n$ est croissante,

$$\begin{aligned}
\lim\inf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} & \geq \lim\inf_{n\to\infty} \frac{S_{k_m(n)}}{k_m(n)} \frac{k_m(n)}{k_{m(n)}+1} \\
& \geq \frac{1}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{S_{k_m(n)}}{k_{m(n)}} = \frac{1}{\alpha} EX_1 < \infty.
\end{aligned}$$

De même,

$$\lim\sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \alpha \mathbb{E}X_1 \text{ p.s..}$$

Comme $\alpha > 1$ est arbitraire on conclut en faisant $\alpha \to 1$. □

2 Théorème limite central

Idée de la preuve. On considère le cas de v.a. i.i.d. centrées réelles et on pose

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Alors

$$\mathbb{E}(e^{itY_n}) = \mathbb{E}(\Pi_{i=1}^n e^{itX_i}) = \varphi_X(\lambda/\sqrt{n})^n$$

Or (et là il y a un peu de travail, cf TD)

$$\varphi_X(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}) = \varphi_X(0) + \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\varphi_X'(0) + \frac{\lambda^2}{2n}\varphi_X''(0) + o(\frac{1}{n})$$

et on déduit

$$\mathbb{E}(e^{itY_n}) \to e^{\lambda^2 \varphi''(0)}$$

On reconnait à droite la transformée de Fourier d'une gaussienne centrée de variance $\varphi_X''(0) = -\mathbb{E}(X^2)$ et le théorème de Lévy entraine que Y_n converge en loi vers cette gaussienne (TLC).

Maintenant la preuve en dimension N et en justifiant bien le DL.

Exercice 2.1. Développement limité de la fonction caractéristique (Ouvrard tome II p. 323)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant un moment d'ordre 2. Soit ϕ_X sa fonction caractéristique.

1) Montrer que pour tout réel x

$$\exp(ix) = 1 + ix - x^2 \int_0^1 (1-u)\exp(iux)du$$

2) En déduire

$$\left|\exp(ix) - \left(1 + ix - x^2/2\right)\right| \leq x^2$$

3) En appliquant la même méthode (Taylor avec reste intégral à l'ordre 3), montrer que

$$\left|\exp(ix) - \left(1 + ix - x^2/2\right)\right| \leq |x|^3/6$$

4) En déduire

$$\left|\exp(ix) - (1 + ix - x^2/2)\right| \leq \inf(|x|^2, |x|^3/6)$$

puis

$$\left|\phi_X(t) - \left(1 + it\mathbb{E}(X) - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}(X^2)\right)\right| \leq t^2\mathbb{E}\left[\inf(|X|^2, |t||X|^3/6)\right]$$

Remarquer en particulier le développement limité en $o(t^2)$ ainsi obtenu.

Exercice 2.2. On va prouver le Théorème central limite, qui est une application importante du théorème de Lévy :

Théorème 2.1. *(Ouvrard p. 325)*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, i.i.d. et admettant un moment d'ordre 2 (c'est-à-dire dont le carré de la norme euclidienne est intégrable). Alors la suite de terme général Y_n défini par

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbb{E}(X_j))$$

converge en loi vers une gaussienne centrée dont la matrice de covariance C est celle des X_i.

1) Montrer que la fonction caractéristique de Y_n est donnée par

$$\phi_{Y_n}(t) = \left[\phi_{<X_1-\mathbb{E}(X_1),t>}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

2) En déduire par l'exercice précédent le développement asymptotique

$$\phi_{Y_n}(t) = \left[1 - \frac{1}{2n}\mathbb{E}(< X_1 - \mathbb{E}(X_1), t >^2) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

3) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n} + o(\frac{1}{n})\right)^n = \exp(z)$$

(On utilisera le log complexe et un développement limité a l'ordre 1).

4) En déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\phi_{Y_n}(t) = \exp\left[-\frac{1}{2} < Ct, t >\right]$$

5) Conclure par le théorème de Lévy.

Solution : 3) On procéde comme suit. D'abord on définit le logarithme complexe pour $|z| < 1$ *par* $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$ *Pour* $z \in]-1,1[$ *cette fonction holomorphe coïncide avec* $\log(1+x)$ *et on a* $e^{\log(1+x)} = 1 + x$, $x \in]-1,1[$. *Par le théorème des zéros isolés, on a donc* $e^{\log(1+z)} = 1 + z$ *pour* $|z| < 1$. *Enfin on a en considérant le développement en série* $n\log(1 + \frac{z}{n} + o(\frac{1}{n})) \to z$. *Donc en prenant l'exponentielle*

$$e^{n\log(1+\frac{z}{n}+o(\frac{1}{n}))} = (1 + \frac{z}{n} + o(\frac{1}{n}))^n \to e^z$$

quand $n \to \infty$.

Exercice 2.3. Théorème central limite "local"
Dans cet exercice, nous suivons Grimmett & Stirzaker, pp. 195-196.

Théorème 2.2. *Soient* $(X_n)_n$ *des variables aléatoires réelles i.i.d., centrées et de variance égale à 1, admettant une fonction densité intégrable* g_1. *On note* $\phi(t) = \phi_X(t)$ *la fonction caractéristique commune des* X_n. *On suppose que cette fonction est intégrable.*
Alors la fonction densité g_n *de* $U_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ *existe et satisfait*

$$g_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

quand $n \to \infty$, *et la convergence est uniforme pour* $x \in \mathbb{R}$.

On utilisera systématiquement les résultats de l'exercice précédent.

1) Montrer que g_n existe et que $g_n(x) = \sqrt{n}(g_1 * \cdots * g_1)(x\sqrt{n})$. Suggestion : Pour bien apprécier la rapidité de la convergence, il est conseillé de simuler sous Matlab cette convolution itérée, avec par exemple $g_1 = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}$, ou n'importe quelle autre fonction positive, paire, et d'intégrale égale à 1. On vérifiera pratiquement qu'une forme gaussienne parfaite apparaît pour g_n au bout de très peu d'itérations (moins d'une dizaine). Cela permet un développement numérique très simple et très convaincant. Montrer que $g_1 = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème, mais que

$g_1 * g_1$ les vérifie. En généralisant cet exemple, déduire une forme plus générale du thèorème 2.2. On pourra consulter [**?**] pour avoir une idée plus précise de la vitesse de convergence.

2) On note $\psi_n(t)$ la fonction caractéristique de U_n. Montrer que $\psi_n(t) = \phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n$ puis que g_n est donnée par $g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \psi_n(t) dt$.

3) Montrer que $|\phi(t)| < 1$ pour $t \neq 0$. *Indications : supposer que cela soit faux pour un certain t, poser $\phi(t) = e^{i\alpha}$ et regarder la partie réelle de l'intégrale de Fourier définissant $\phi(0) - e^{-i\alpha}\phi(t)$.*

4) Montrer qu'il existe δ tel que $|\phi(t)| \leq e^{-\frac{1}{4}t^2}$ pour $|t| \leq \delta$. On utilisera le fait que $1 - t \leq e^{-t}$ pour tout réel t.

5) Montrer que pour tout $a > 0$, $\phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n \to e^{-\frac{1}{2}t^2}$ uniformément pour $t \in [-a, a]$

6) Montrer que

$$|g_n(x) - \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n - e^{-\frac{1}{2}t^2}| dt = I_n.$$

7) Montrer que

$$\int_{a \leq |t| \leq \delta\sqrt{n}} |\phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n - e^{-\frac{1}{2}t^2}| dt \leq 2 \int_a^\infty 2e^{-\frac{1}{4}t^2} dt \to 0$$

quand $a \to \infty$.

8) On traite la partie de l'intégrale I_n pour laquelle $|t| > \delta\sqrt{n}$. On pose $\eta = \sup_{|t| \geq \delta} |\phi(t)| < 1$. Montrer que

$$\int_{|t| \geq \delta\sqrt{n}} |\phi(\frac{t}{\sqrt{n}})^n - e^{-\frac{1}{2}t^2}| dt \leq \eta^{n-1} \int_{\mathbb{R}} |\phi(\frac{t}{\sqrt{n}})| dt + 2 \int_{\delta\sqrt{n}}^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} \to 0$$

quand $n \to \infty$.

9) Conclure en utilisant les résultats des questions 5) à 8)

10) En reprenant la démonstration pas à pas et en signalant les (petites) différences dans les formules, montrer que le théorème central limite local est encore vrai pour des variables X_n à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

3 Application : Méthode de MonteCarlo pour les calculs d'intégrales

On cherche à estimer :

$$I = \int_{[0,1]^d} f(x) dx$$

(ou plus généralement une fonction à support compact) à partir de

$$I_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n f(U_i).$$

Par loi des grands nombres, si f est intégrable, I_n converge vers $I = \mathbb{E}(f(U))$.
Par le théorème central limite, si f^2 est intégrable, alors

$$\sqrt{n}(I_n - I) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

avec

$$\sigma^2 = \int_{[0,1]^d} f(x)^2 dx - [\int_{[0,1]^d} f(x)dx]^2.$$

La vitesse est donc en $\sqrt{n}$ et on rappelle que pour la méthode déterministe, elle elle est en $o(h)$ pour le rectangle (et pour le point milieu $f(a+ih/2)$ qd la fonction est C^2, elle est en $o(h^2) = o(1/n^{2/d})$ puisque $nh^d = 1$. Elle est même en h^2 (resp. h^3) puisque $I - Estimat = (b-a)^2 f'(\eta)/2 = (b-a)^3 f''(\eta)/24$ pour le rectangle (resp. le point milieu).

Donc la méthode aléatoire est intéressante

- en grande dimension $d > 6$ ($d > 4$ pour le rectangle).
- quand les bords du domaine sont irréguliers
- quand la fonction est peu régulière.

On peut l'améliorer quand il y a une densité g telle que $I = \int fg dx$ en considérant

$$I_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f(X_i).$$

ou les X_i sont iid de densité g et sont placées aux endroits où f met sa masse, cad où son intégrale est grande.

4 Grandes déviations

Source : Grimmett G., Stirzaker D.

Exercice 4.1. Fonction génératrice On appelle transformée de Laplace d'une variable aléatoire X de moyenne μ la fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $M(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$. Dans toute la suite, on supposera que pour les variables aléatoires considérées, $M(t)$ est définie et bornée dans un intervalle ouvert contenant l'origine.

0) Monter que l'ensemble où $M(t)$ est bien défini est convexe, que c'est un intervalle I contenant 0, et que M est bornée sur tout segment de I
On pourra séparer la partie positive et négative de X.

1) En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, vérifier que

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$$

sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et que

$$\mathbb{E}(X) = M'(0),\ \ \mathbb{E}(X^k) = M^{(k)}(0),\ \ M'(t) = \mathbb{E}(Xe^{tX}),\ M''(t) = \mathbb{E}(X^2e^{tX}).$$

2) On pose $\Lambda(t) = \log M(t)$ la Log-Laplace de X. Montrer que

$$\Lambda(0) = \log M(0) = 0, \quad \Lambda'(0) = \frac{M'(0)}{M(0)} = \mu.$$

3) Sur son intervalle de définition, $\Lambda(t)$ est convexe. Plus précisément, montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\Lambda''(t) = \frac{M(t)M''(t) - M'(t)^2}{M(t)^2} \geq 0.$$

4) On rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwartz $(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2))$ ne devient une égalité que s'il existe λ tel que $X = \lambda Y$. En déduire que si X est de variance non nulle, alors $\Lambda(t)$ est strictement convexe sur son intervalle de définition.

5) On définit la transformée de Fenchel-Legendre de Λ par

$$\Lambda^*(a) = \sup_{t\in\mathbb{R}}(at - \Lambda(t)), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que Λ^* est convexe sur $\mathbb{R}$.

Indication. Soit μ_X la loi de X. Ecrire

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} \sum_k \frac{t^k x^k}{k!} d\mu_X = \int_{\mathbb{R}^+} \sum_k \frac{t^k x^k}{k!} d\mu_X + \int_{\mathbb{R}^-} \sum_k \frac{t^k x^k}{k!} d\mu_X.$$

On peut intervertir intégration et sommation dans le premier terme de droite grâce au théorème de la convergence monotone (Beppo-Levi) et on peut intervertir dans le second terme parce que la série est alternée et donc uniformément convergente.

Exercice 4.2. Notre but est de montrer l'estimation de grande déviation suivante :

Théorème 4.1. *Soient X_1, X_2,... des variables i.i.d. de moyenne μ et telles que $M(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ soit fini dans un intervalle ouvert contenant 0. On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)$. Soit $a > \mu$ tel que $\mathbb{P}(X > a) > 0$. Alors $\Lambda^*(a) > 0$ et*

$$-\frac{1}{n}\log \mathbb{P}(S_n > an) \to \Lambda^*(a) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Faisons le point : la loi des grands nombres nous dit que $\frac{1}{n}S_n \to \mu$ presque sûrement. Le théorème central limite nous dit que les déviations typiques de $S_n - n\mu$ sont de l'ordre de $c\sqrt{n}$. Donc, les probabilités $\mathbb{P}(S_n - \mu) \geq n^\alpha)$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$ sont petites et le théorème nous donne une estimation asymptotique précise de cette petitesse pour $\alpha = 1$.

Grandes lignes :

1) La borne inférieure. Par l'inégalité de Markov, pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq nx\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - nx\right]\right)\right) \leq \exp\big(-n\lambda x - n\log(\mathbb{E}(\exp(\lambda X)))\big)$$

et il suffit alors d'optimiser en λ l'inégalité suivante :

$$\liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\left(\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq nx\right)\right) \geq \lambda x - \log(\mathbb{E}(\exp(\lambda X))).$$

b)Pour la borne supérieure, on utilise le réel τ et le changement de loi associés à x par

$$x = \Lambda'(\tau) = \frac{\mathbb{E}\left(Xe^{\tau X}\right)}{\mathbb{E}\left(e^{\tau X}\right)}, \quad \mathbb{P}(X' \in du) = \frac{e^{\tau u}}{\mathbb{E}(e^{\tau X})}\,\mathbb{P}(X \in du)$$

et on fixe $\mu \leq x < y$, on commence par montrer que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(nx \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq ny\right)\\
&= \int \mathbb{1}(nx \leq x_1 + \cdots + x_n \leq ny)\ \mathbb{P}(X_1 \in dx_1)\cdots\mathbb{P}(X_n \in dx_n)\\
&= \mathbb{E}\big(e^{\tau X}\big)^n \int \mathbb{1}(nx \leq x_1 + \cdots + x_n \leq ny)\ e^{-\tau(x_1+\cdots+x_n)}\ \mathbb{P}(X_1' \in dx_1)\cdots\mathbb{P}(X_n' \in dx_n)\\
&\geq \exp\big(n\log(\mathbb{E}(e^{\tau X})) - n\tau y\big)\ \mathbb{P}\left(nx \leq \sum_{i=1}^{n} X_i' \leq ny\right).
\end{aligned}$$

où les Y_i sont iid de loi Y. De plus

$$\mathbb{E}(X') = \frac{\mathbb{E}(Xe^{\tau X})}{\mathbb{E}(e^{\tau X})} = \Lambda'(\tau) = x.$$

Donc par le théorème central limite, on obtient

$$\mathbb{P}(nx \leq \sum_{i=1}^{n} X_i' \leq ny) = \mathbb{P}\left(0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i' - nx\Big) \leq \sqrt{n}(y-x)\right) \to 1/2$$

quand $n \to \infty$. Donc

$$\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(nx \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq ny\right) \leq \tau y - \log(\mathbb{E}(e^{\tau X})).$$

Pour conclure, on observe que

$$\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(nx \leq \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(nx \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq ny\right) \leq \tau y - \log(\mathbb{E}(e^{\tau X})).$$

Ensuite, on fait tendre y vers x dans b), ce qui donne la borne supérieure, tandis que la borne inférieure est donnée par a).

PROBLEME. **PREMIÈRE PARTIE**

1) Montrer que l'on peut supposer sans perte de généralité que $\mu = 0$: on supposera le théorème démontré pour $\mu = 0$ et si ce n'est pas le cas, on remplacera X_i par $X_i - \mu$.

2) En changeant X_i en $-X_i$ et en appliquant le théorème, donner aussi la limite de $\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n < na)$, pour $a < \mu$.

3) On va montrer que $\Lambda^*(a) > 0$. Soit $\sigma^2 = var(X)$. Montrer que

$$at - \Lambda(t) = \log(\frac{e^{at}}{M(t)}) = \log \frac{1 + at + o(t)}{1 + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2)}$$

pour t petit et en déduire que $\Lambda^*(a) > 0$.

4) Déduire de $\Lambda'(0) = E(X) = 0$ que

$$\Lambda^*(a) = \sup_{t>0}(at - \Lambda(t)), \quad a > 0.$$

5) Dans cette question et les suivantes, on procède comme pour l'inégalité de Hoeffding. Remarquer que $e^{tS_n} > e^{nat} 1\!\!1_{S_n > na}$ et en déduire que

$$\mathbb{P}(S_n > na) \le e^{-n(at - \Lambda(t))}.$$

6) En déduire que

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n > na) \le -\sup_{t>0}(at - \Lambda(t)) = -\Lambda^*(a).$$

Cette majoration donne la "moitié" du théorème ; il va falloir maintenant minorer.

DEUXIÈME PARTIE Dans cette partie, on va faire une hypothèse sur Λ^* qui est vérifiée en pratique.

Définition 4.1. *On dira qu'on est dans le cas "régulier" en a si le maximum définissant $\Lambda^*(a)$ est atteint dans l'intérieur de l'intervalle de définition de $M(t)$. On notera $\tau = \tau(a)$ cette valeur de t.*

Soit $T := \sup\{t,\ M(t) < \infty.\}$.

1) Vérifier que

$$\Lambda^*(a) = a\tau - \Lambda(\tau), \quad \Lambda'(\tau) = a.$$

2) On note $F(u) = \mathbb{P}(X \le u)$ la fonction distribution de X. On va lui associer une fonction auxiliaire par un "changement exponentiel de distribution" défini comme suit. On pose $d\tilde{F}(u) = \frac{e^{\tau u}}{M(\tau)} dF(u)$, ou en d'autres termes,

$$\tilde{F}(y) = \frac{1}{M(\tau)} \int_{-\infty}^{y} e^{\tau u} dF(u).$$

On considère $\tilde{X}_1,\ \tilde{X}_2,\dots$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes $\tilde{F}$ comme distribution et on pose $\tilde{S}_n = \tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_n$.

3) En utilisant la formule générale $M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tu} dF(u)$, montrer que

$$\tilde{M}(t) = \frac{M(t+\tau)}{M(\tau)}.$$

4) En déduire que

$$\mathbb{E}(\tilde{X}_i) = \tilde{M}'(0) = a,$$
$$var(\tilde{X}_i) = \mathbb{E}(\tilde{X}_i^2) - \mathbb{E}(\tilde{X}_i)^2 = \tilde{M}''(0) - \tilde{M}'(0)^2 = \Lambda''(\tau).$$

5) Montrer que la transformée de Laplace de $\tilde{S}_n$ est

$$\left(\frac{M(t+\tau)}{M(\tau)}\right)^n = \frac{1}{M(\tau)^n}\int_{\mathbb{R}} e^{(t+\tau)u} dF_n(u),$$

où F_n est la fonction de distribution de S_n. En déduire que la fonction de distribution $\tilde{F}_n$ de $\tilde{S}_n$ vérifie

$$d\tilde{F}_n(u) = \frac{e^{\tau u}}{M(\tau)^n} dF_n(u).$$

6) Soit $b > a$. Déduire de la question précédente que

$$\mathbb{P}(S_n > na) \geq e^{-n(\tau b - \Lambda(\tau))}\mathbb{P}(na < \tilde{S}_n < nb).$$

7) En utilisant le fait que la moyenne des $\tilde{X}_i$ est a et le théorème central limite et la loi des grands nombres, montrer que $\mathbb{P}(na < \tilde{S}_n < nb) \to \frac{1}{2}$. Déduire de ce fait et de la question précédente que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \mathbb{P}(S_n > na) \geq -(\tau b - \Lambda(\tau)) \to -\Lambda^*(a) \quad \text{quand } b \to a.$$

TROISIÈME PARTIE

1) On se place sous les mêmes hypothèses que dans la deuxième partie, sauf que l'on considère maintenant le cas non régulier. Pour se ramener au cas régulier, on fixe $c > a$ et on pose $X^c = \inf(X, c)$. On note $M^c(t)$ la transformée de Laplace associée et on pose $\Lambda^c(t) = \log M^c(t)$.

2) Montrer que $M^c(t) < \infty$ pour tout $t > 0$, que $\mathbb{E}(X^c) \to 0$ quand $c \to \infty$ et que $\mathbb{E}(X^c) \leq 0$.

3) Montrer qu'il existe $b \in]a, c[$ tel que $\mathbb{P}(X > b) > 0$ et en déduire que

$$at - \Lambda^c(t) \leq at - \log(e^{tb}\mathbb{P}(X > b)) \to -\infty \text{ quand } t \to \infty.$$

4) En conclure que la suite X_i^c est dans le "cas régulier" de la partie précédente c'est à dire que le sup de $at - \Lambda^c(t)$ pour $t > 0$ est atteint en une valeur $\tau^c \in]0, \infty[$, et finalement que

$$\frac{1}{n}\log \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i^c > na) \to -(\Lambda^c)^*(a) \text{ quand } t \to \infty.$$

(On pose $\Lambda^{c^*} := \sup_{t>0}(at - \Lambda^c(t)) = a\tau^c - \Lambda^c(\tau^c))$.

5) Montrer que $\Lambda^{c*}(a) \downarrow \Lambda^{\infty *}$ quand $c \to +\infty$. et que $0 \leq \Lambda^{\infty *} < \infty$.

6) Montrer que

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(S_n > na\right) \geq \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i^c > a\right).$$

7) Expliquer pourquoi il suffit, pour conclure le théorème dans le cas irrégulier, de montrer que $\Lambda^{\infty *} \leq \Lambda^*(a)$.

8) Pour montrer cette dernière relation, procéder comme suit : Montrer que l'ensemble $I_c = \{t \geq 0,\ \ at - \Lambda^c(t) \geq \Lambda^{\infty *}\}$ est non vide. Montrer que I_c est un intervalle fermé compact. Montrer que les intervalles I_c sont emboîtés quand c croît et en déduire qu'il existe $\zeta \in \cap_{c>a} I_c$. Montrer finalement que $\Lambda^c(\zeta) \to \Lambda(\zeta)$ quand $c \to \infty$ et que $a\zeta - \Lambda(\zeta) = \lim_{c\to\infty}(a\zeta - \Lambda^c(\zeta)) \geq \Lambda^{\infty *}$. Conclure.