PC no. 2

Limitation de la croissance

Exercice 1:
Equation logistique pour des poissons avec pêche à taux constant.
Des poissons vivent dans un lac avec une capacité biotique donnée. Les ours s'en nourrissent et la quantité $N(t)$ de poisson est décrite par

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = N(t)(1 - N(t)) - c$$

avec $c > 0$.
1) Expliquer l'équation.
2) Décrire l'évolution de la quantité de poisson.
3) Expliquer et comparer avec le modèle suivant :

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = N(t)(1 - N(t)) - cN(t).$$

Exercice 2:
Modèles à capacité saisonnière
Une population N est soumise à une contrainte saisonnière périodique qui affecte sa capacité biotique. Le modèle proposé est le suivant

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha N(t)\left(1 - N(t)\frac{1 + \beta\cos(\gamma t)}{K}\right),$$

avec $\alpha, K, \gamma > 0$ et $0 < \beta < 1$.
Résoudre l'équation (en posant $y = 1/N$).
Comparer avec le modèle logistique.

Exercice 3:
La chenille de l'épicéa et le phénomène d'hystérésis.
On modélise l'évolution de la population de ces chenilles par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{BN(t)^2}{A^2 + N(t)^2}$$

où le second terme du membre de droite modélise un terme de prédation par des oiseaux. (Les paramètres r, K, B, A sont tous positifs.)

0) Commenter le terme de prédation.

1) Proposer un changement de paramètres de sorte que l'équation s'écrive

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \rho u\left(1 - \frac{u}{\kappa}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}.$$

2) Déterminer les points d'équilibre en fonction des valeurs des paramètres ρ et κ et discuter graphiquement leur stabilité.

On va supposer qu'on fait varier les paramètres "suffisamment" lentement de telle sorte que la population soit toujours à l'équilibre.

3) Supposons que le couple (κ, ρ) tel qu'il y a trois points fixes (en dehors de 0) et que la population initiale soit petite (proche de zéro). En fixant le paramètre κ et en augmentant ρ, décrivez le phénomène de pullulation des chenilles.

4) On se place dans la situation de pullulation, c-à-d lorsque ρ est grand et que l'équilibre est proche de κ. On fait diminuer ρ (en employant par exemple un insectiside). Que se passe-t'il ?

Exercice 4:
Chaîne de naissance et mort On considère une chaîne de naissance et mort $(X_n : n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{N}$, c'est à dire une chaîne de Markov dont la matrice de transition Q est définie par

$$Q(0,0) = r_0, \quad Q(0,1) = p_0 > 0, \quad p_0 + r_0 = 1$$

et pour tout $i \geq 1$

$$Q(i,i-1) = q_i > 0, \quad Q(i,i) = r_i, \quad Q(i,i+1) = p_i > 0, \quad q_i + r_i + p_i = 1.$$

On définit $\tau_i := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}$ (on pose $\inf \varnothing = \infty$) comme le temps d'atteinte de l'état i par la chaîne.
On définit également

$$\gamma_0 = 1, \quad \forall i \geq 1,\ \gamma_i = \frac{q_1 \dots q_i}{p_1 \dots p_i}.$$

et pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a + 1 < b$, on considère $\tau = \min(\tau_a, \tau_b)$.

1. Soit u une fonction telle que $Qu(i) = u(i)$ pour tout $a+1 \leq i \leq b-1$, où l'on rappelle que $Qu(i) = \sum_j Q(i,j)u(j)$.
   Montrer que
   $$u(i) = u(a) + (u(a+1) - u(a))\gamma_a^{-1} \sum_{k=a}^{i-1} \gamma_k$$
   pour tout $a \leq i \leq b$ et que u est monotone sur cet intervalle.
2. Montrer que pour tout $a \leq i \leq b$, $\mathbb{P}_i(\tau < \infty) = 1$ et que
   $$\mathbb{P}_i(X_\tau = b) = \frac{\sum_{k=a}^{i-1} \gamma_k}{\sum_{k=a}^{b-1} \gamma_k}.$$
3. Calculer $\mathbb{P}_1(\tau_0 = \infty)$ et déterminer quand la chaîne atteint presque sûrement 0 (récurrence). Que fait-elle sinon ?
4. Exemples : étudier la récurrence de la chaîne dans les cas suivants :
   (a) Le cas homogène : $\forall i \geq 1$, $p_i = p$, $q_i = q$, $r_i = r$.
   (b) $p_i = \frac{i+2}{2i+3}$, $\quad q_i = \frac{i+1}{2i+3}$.
   (c) $p_i = \frac{i+3}{2i+3}$, $\quad q_i = \frac{i}{2i+3}$.

Exercice 5:
Limites grandes populations
1) Décrire un modèle aléatoire individu centré pour prendre en compte la compétition pour les ressources.
2) Analyser les limites grandes population de ce modèle. Préciser quand on retrouve le modèle logistique discret puis le modèle logistique continu.

Pour s'exercer

Exercice 6:
Croissance d'une bactérie dans une boîte de Pétri.
On considère la croissance d'un amas de bactérie dans une boîte de Pétri. L'amas croît uniformément dans toutes les directions. Seules les bactéries à la surface de l'amas se reproduisent. En notant $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t, justifier le modèle suivant

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t)^{2/3}, \quad N(0) > 0, \quad r > 0,$$

et le résoudre.
Exercice 7:
Modèle de Gompertz.
Étudier le modèle à une population donné par :

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha N(t)\log(N(t)/K),$$

avec $\alpha, K > 0$ et $N(0) > 0$.

Exercice 8:
Considérons le modèle démographique suivant :

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = a\frac{N(t)}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\alpha}\right),$$

avec $a, \alpha > 0$.
1) Reconnaître ces modèles quand $\alpha = 1$ et $\alpha \to 0$. Les étudier.
2) Quelle est la limite de $N(t)$ quand $t \to \infty$

Pour aller plus loin

Exercice 9:
On considère l'équation

$$y' = y^{2/3}.$$

1) Montrer que pour tout $a > 0$ il y a une infinité de solutions sur $[0, a]$ qui vérifient $y(0) = 0$.
2) Pour quelles valeurs de $a > 0$ y-a-t'il une infinité de solutions sur $[0, a]$ qui satisfont $y(0) = -1$?

Exercice 10:
Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^+$ de

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0.$$

Exercice 11:
Montrer que l'équation différentielle

$$y' = -\sqrt{y}, \quad y(0) = y_0 > 0$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, et qu'elle atteint 0 en temps fini.

Exercice 12:
Montrer que l'équation

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0 \neq 0$$

admet une unique solution, qui "explose" en temps fini.

Exercice 13:
Modèle logistique à temps discret
Considérons le modèle logistique à temps discret suivant :

$$u_{n+1} = 4u_n(1-u_n), \qquad 0 \leq u_0 \leq 1.$$

1) Expliquer ce modèle à partir du modèle logistique à temps continu.
2) En écrivant $u_0 = \sin(2\pi\theta)^2$ ($\theta \in [0,1[$), montrer que $u_n = \sin(2^n 2\pi\theta)^2$.
3) Lorsque θ est rationnel, montrer que la suite u_n est périodique à partir d'un certain rang en décomposant θ en base 2. Commenter le résultat par rapport au modèle logistique à temps continu. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(u_n)$$

admet une limite et la donner.
4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite de fonctions

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi\theta 2^n k}.$$

Montrer que $V_n \to 0$ dans $L^2[0,1]$.
5) En déduire qu'il existe un ensemble $K \subset [0,1]$ de mesure de Lebesgue 1 tel que pout tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall \theta \in K : \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^p \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

6) En déduire que pour toute fonction continue f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mu(x)\mathrm{d}x,$$

avec $\mu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$.
7) Soit $(X_n : n \geq 0)$ une suite de v.a. i.i.d. de densité μ et f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)$$

converge et donner sa limite. Comparer avec la question précédente.