TDLM115. Continuité et dérivabilité.

1 Limites

Exercice 1:
Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}, \qquad \lim_{x\to 0} x\mathrm{E}(\frac{1}{x}), \qquad \lim_{x\to\infty} (x^3+1)^{1/3}-(x+1).$$

Indication pour la dernière : il faut une forme conjuguée pour les racines cubiques.

Exercice 2:
Soit f fonction périodique de période T telle que $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$.
Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 3:
Soit f fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f([0,1])$ est majoré et

$$\lim_{x\to\infty} f(x+1)-f(x)=l$$

Montrer que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=l.$$

2 Continuité

Exercice 4:
Soit f fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1) On suppose f continue. Montrer que

$$f \text{ strictement monotone } \Leftrightarrow \ f \text{ injective.}$$

2) On suppose f croissante. Montrer que

$$f \text{ continue } \Leftrightarrow \ f \text{ surjective de } [a,b] \text{ dans } [f(a),f(b)].$$

Exercice 5:
Soit f fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}^+$ et qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}^+$ tel que $\inf\{f(x) : x\in[0,\infty[\} = f(x_0)$.

Exercice 6:
Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$, tel que $f(x_0)=x_0$ par deux méthodes

1) en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

2) en faisant intervenir (quand elle existe) la borne supérieure de $\sup\{x\in[0,1] : f(x)>x\}$.

Exercice 7:
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \forall\, y \in \mathbb{R}^+, \quad f\big(\frac{x+y}{2}\big) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{1}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(1/2^n) = f(1)/2^n$ puis que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(k/2^n) = f(1)k/2^n$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = f(1)x$.

3) Déterminer l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient (1).

Exercice 8:
Soit f et g fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $x \longrightarrow \sup\{f(x),g(x)\}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f et g dérivables n'implique pas $x \longrightarrow \sup\{f(x),g(x)\}$ dérivable.

Exercice 9:
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$e^{u_n} = 1 + u_n + \frac{1}{n}.$$

2) Montrer que u_n est décroissante et converge vers 0.

3) Trouver un équivalent de u_n.

3 Dérivabilité

Exercice 10:
1) Montrer que les deux fonctions suivantes sont continues mais non dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = x\sin(1/x) \text{ si } x \neq 0, \quad g(0) = 0.$$

2) Montrer que $x \rightarrow \cos(\sqrt{|x|})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11:
Soit f fonction continue sur $[0,\infty[$ et dérivable sur $]0,\infty[$ telle que

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,\infty[$ tel que $f'(x_0) = 0$ par deux méthodes

1) en utilisant $g(x) = f(\tan(x))$ sur $[0,\pi/2[$.

2) en utilisant le minimum de f.

Exercice 12:
Soit f fonction continue et dérivable sur $[a,b]$ telle que

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) < 0, \quad f'(b) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$ (faire un dessin).

Exercice 13:
Soit f fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=l.$$

Montrer que f est dérivable en 0 de derivée l.
Indication : on pourra écrire

$$f(x)-f(0)=\sum_{k=0}^{2^n-1}f((k+1)x/2^n)-f(kx/2^n).$$

Exercice 14:
Soit f fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0, telle que $f(0)=0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})=f'(0)/2.$$

Exercice 15:
Soit f fonction dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
1) Montrer que si $\lim_{x\to\infty}f'(x)=l$, alors

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=l.$$

2) Montrer que si $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$, alors

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty.$$

4 Dérivée n ième

On appelle dérivée n ième de f et on note $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$ ($f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f'$).

Exercice 16:
Soit f fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\qquad \forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)\leq M$$

1) Suppose que f' ne tend pas vers 0 en ∞ et montre qu'il existe $\epsilon>0$, $\eta>0$ tels que

$$\forall x_0\in\mathbb{R},\ \exists x\geq x_0 \text{ tel que } (\forall y\in[x,x+\eta],\ f'(x)\geq\epsilon) \text{ ou } (\forall y\in[x,x+\eta],\ f'(x)\leq-\epsilon).$$

En déduire que $f(x+\eta)-f(x)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers ∞.
2) En déduire que f' tend vers 0 en ∞.

Exercice 17:
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. Montrer que pour tout $c\in]a,b[$, il existe $d\in]a,b[$ tel que

$$f(c)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)+\frac{1}{2}(c-a)(c-b)f''(d).$$

Indication : considérer $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-\frac{1}{2}K(x-a)(x-b)$.

Exercice 18:
Soit $f\in\mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ qui s'annule en $n+1$ points de $[a,b]$. Montrer qu'il existe $x_0\in]a,b[$ tel que

$$f^{(n)}(x_0)=0.$$

Exercice 19:
Soit $f :]-1{,}1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Soit P_n le polynôme défini par

$$P_0 = 1, \qquad P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (2n+1)XP_n.$$

Montrer que f est infiniment dérivable sur $]-1{,}1[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1{,}1[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}.$$

5 Pour aller plus loin...

Exercice 20:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n+1$ fois dérivables et les dérivées sont continues). On suppose que f et $f^{(n+1)}$ sont bornées.

1) Montrer que

$$\{|\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k| : x \in \mathbb{R},\, h \in [0{,}1]\}$$

est majoré.

2) Utiliser une norme sur les polynômes de degré inférieur ou égal à n pour prouver que $f, f', .., f^{(n)}, f^{(n+1)}$ sont bornées.

Exercice 21:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continu sur I si

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall x \in I,\, \forall y \in I,\, |x-y| \le \eta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \le \epsilon.$$

1) Montrer qu'une fonction uniformément continue sur I est coninue sur I

2) Montrer qu'une fonction continue sur un segement est uniformément continue sur ce segemnt (utliser le théorème de Bolzano Weierstrass : tout suite appartenant à un segment admet une sous suite convergente).

3) Montrer que $x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

4) Montrer que $x \to 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0,\infty[$.

Exercice 22:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f_n converge simplement vers f ssi

$$\forall x \in I,\, f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

On dit que f_n converge uniformément vers f ssi

$$\sup_I\{|f_n(x) - f(x)|\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1) Montrer que f_n converge uniformément vers f implique f_n converge simplement vers f.

2) Montrer que la réciproque est fausse (utiliser $x \in [0{,}1] \to x^n$).

3) Montrer que si f_n converge simplement vers f et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n croissante alors f croissante.

4) Montrer que si f_n converge uniformément vers f et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n continue alors f continue.

5) Montrer que la convergence simple ne suffit pas pour 4).