TDLM115. Intégration.

1 Généralités

Exercice 1:
Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3(t^2)}{(2+t)^n}dt, \qquad \lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\cos(t)}{t}dt$$

Exercice 2:
Soit f dérivable sur $[a,b]$ telle que

$$f(a)=f(b)=0, \qquad \forall x\in[a,b],\ \ |f'(x)|\leq M.$$

Montrer que

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \frac{M(b-a)^2}{4}.$$

Indication : faire un dessin en précisant dans quelle zone la fonction f peut se trouver.

Exercice 3:
Soit f fonction continue sur $[a,b]$ telle que pour toute fonction g continue sur $[a,b]$ on a

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Montrer que f est nulle sur $[a,b]$. (Indication on pourra raisonner par l'absurde)

Exercice 4:
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On définit pour $x\in\mathbb{R}$

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

1) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On définit h par $h(0)=0$ et pour $x\in\mathbb{R}^*$

$$h(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

Montrer que si f est dérivable en 0, alors h est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5:
Trouver l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$|\int_a^b f(x)dx| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Exercice 6:
Soit f continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big(\int_a^b f(x)^n dx\Big)^{1/n} \leq M.$$

2) Montrer que pour tout $\epsilon \in]0,M[$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b f(x)^n dx \geq (M-\epsilon)^n (2\eta).$$

3) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_a^b f(x)^n dx\Big)^{1/n} = M.$$

Exercice 7:
Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
1) **Dans cette question**, on suppose $f = cx^m$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$$

2) Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$,

$$|(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx - f(1)| \leq (n+1)\int_0^\alpha x^n |f(x)|dx + \alpha^{n+1}|f(1)| + (n+1)\int_\alpha^1 x^n |f(x) - f(1)|dx$$

3) En déduire que pour tout fonction continue f,

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$$

4*) En s'inspirant de la méthode (c'est à dire questions 2) et 3)) , montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n) dt = f(0).$$

Exercice 8:
Pour tout $\alpha > 0$, on définit

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

1) Montrer si $\alpha = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq 1/2$ puis que $u_n$tend vers $+\infty$.
2) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^+$ décroissante et continue. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_2^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)dx$$

3) Montrer que si $\alpha \leq 1$, alors u_n tend vers $+\infty$ et si $\alpha > 1$, alors u_n converge.
4) Montrer de même que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\log(k)} = +\infty.$$

2 Calculs

Exercice 9:
Soient $\alpha < \beta$. Calculer $I_{n,m}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ défini par

$$I_{n,m} = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n (x-\beta)^m dx$$

Exercice 10:
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

1)Montrer que $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$.

2) Calculer $I_3(x)$.

Exercice 11:
Calculer les primitives des deux fonctions suivantes

$$\frac{1}{t(t+1)^2}, \qquad \frac{t^2+t+4}{(t+1)(t+2)^2}.$$

Exercice 12:
Calculer, grâce à des changements de variables, les intégrales suivantes pour les réels x où elles sont définies.

$$1)\ \int_0^x \frac{1}{t^2+a^2} dt, \qquad 2)\ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+1}} dt,$$

.

$$3)\ \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt, \qquad 4)\ \int_0^2 t \ln(1+t^2) dt, \qquad 5)\ \int_1^e \frac{\cos(\ln(t))}{t} dt.$$

Exercice 13:
1) Si $p \in \mathbb{N}$ impair et $q \in \mathbb{N}$, calculer grâce à un changement de variable,

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t)^p \sin(t)^q dt.$$

Combien vaut $\int_0^{\pi/2} \cos(t)^3 dt$?

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(x)^{2n} = 2^{-2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos((2n-2k)x) + 2^{-2n} \binom{2n}{n}$$

Calculer (grâce à cette linéarisation)

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2 dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos(x)^4 dx.$$

3) Quand les deux puissances sont paires, on remplace $\sin(t)^2$ par $(1-\cos(t)^2)$ et on peut alors utiliser 2). Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)^2 \sin(x)^2 dx.$$

Exercice 14:
Soit f strictement croissante dérivable de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)dt$$

par deux méthodes

1) approche graphique

2) changement de variable

3 Sommes de Riemann et Taylor Lagrange

Exercice 15:
Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k},\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin(\frac{k}{n}),\quad \lim_{n\to\infty} n^3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^4+k^2n^2+k^4}.$$

Exercice 16:
1) Justifier que

$$X^n - 1 = \Pi_{k=1}^{n}(X - e^{2ik\pi/n}).$$

2) Grâce aux sommes de Riemann, calculer

$$\int_0^{2\pi} \ln\big((\alpha-\cos(x))^2+\sin(x)^2\big)dx$$

Indication : factoriser $(\alpha-\cos(x))^2+\sin(x)^2$ grâce aux nombres complexes

Exercice 17:
Soit F le fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2}\cos(x\sin(t))dt.$$

1) Montrer que pour tout $u\in\mathbb{R}$,

$$1-\frac{u^2}{2}\le\cos(u)\le 1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}$$

En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\frac{\pi}{2}\big(1-\frac{x^2}{4}\big)\le F(x)\le\frac{\pi}{2}\big(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}\big).$$

2) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la fonction F ne s'annule pas sur $[0,2[$, mais s'annule sur $[2,2\sqrt{2}[$.

Exercice 18:
1) Calculer la dérivée $n$ième de $\ln(x)$.

2) Montrer que

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\big(\frac{1}{2}\big)^n\frac{1}{n}$$

converge vers $\ln(2)$.

4 Pour aller plus loin...

Exercice 19:
Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On dit que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si

$$\int_1^x f(t)dt$$

admet une limite finie quand $x \to \infty$.

1) Montrer que $x \to (1/x)^\alpha$ est intégrable ssi $\alpha > 1$.

2) Montrer que si f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors pour tout $a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+a} f(t)dt = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \int_x^{ax} f(t)dt = 0.$$

3) Montrer que si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

En déduire que f^2 est intégrable.

4) Trouver f continue positive intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

5*) Quand f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on note

$$\int_1^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt.$$

Montrer qu'alors pour tout $a > 0$, $x \to |f(t+a) - f(t)|$ est continue et intégrable.
Montrer que

$$\lim_{a\to 0} \int_1^\infty |f(t+a) - f(t)|dt = 0.$$