Travaux dirigés d'introduction aux Probabilités

- Dénombrement -

- Probabilités Élémentaires -

- Variables Aléatoires Discrètes -

- Variables Aléatoires Continues -

- Dénombrement -

Exercice 1 *Combien de mots de passe de 8 symboles peut-on créer avec 66 caractères ? Si, dans un pays, les voitures ont des plaques avec deux lettres (leur alphabet a 26 caractères) et ensuite trois chiffres, combien de plaques possibles y a-t-il ?*

Exercice 2 *Un damier comporte* 25 *cases. Quel est le nombre de manières de placer* 5 *pions de telle sorte qu'il y en ait* 1 *par ligne et* 1 *par colonne.*

Exercice 3 *Un questionnaire comporte 10 questions. Chacune de ces questions a trois réponses possibles. Combien y a-t-il de possibilités de questionnaires remplis pour :*

1. *un étudiant qui répond à toutes les questions ?*
2. *pour un étudiant qui répond à une question ?*
3. *pour un étudiant qui répond à p questions ($1 \leq p \leq 10$) ?*

Exercice 4 *On tire deux cartes d'un même jeu de* 52 *cartes. Quelle est la probabilité de sortir au moins un as ? On envisagera deux cas :*
a/ la seconde carte est tirée après remise dans le jeu de la première carte et mélange et
b/ la seconde carte est tirée en même temps que la première.

Exercice 5 *Un professeur dispose de 32 livres sur un rayon de sa bibliothèque. 23 d'entre eux sont des livres de mathématiques et 9 de physique. Le professeur aimerait ranger ses livres de sorte que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?*

Exercice 6 *4 Américains, 3 Suisses et 5 Anglais doivent s'asseoir sur un même banc. Les gens de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer ?*

Exercice 7 *On veut former un comité comprenant 4 des 23 personnes d'un groupe. Combien y a-t-il de comités possibles ?*

Exercice 8 *On considère une fonction* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *de* n *variables. Combien de dérivées partielles d'ordre* r *y a-t-il si on sait qu'on peut échanger l'ordre des dérivations ?*

Exercice 9 (Poker) *Une main de poker est la donnée de 5 cartes choisies au hasard dans un jeu de 52 cartes (voir les cartes). On associe à chaque main une valeur selon les combinaisons particulières qu'elle présente. Les différentes combinaisons valables sont décrites dans le tableau ci-dessous, avec la valeur qui leur est associée.*

Donner le nombre total de mains, ainsi que le nombre de mains de chaque valeur.

<u>Quinte flush :</u> 5 carte qui se suivent de la même couleur
carré 4 cartes de même hauteur
<u>full :</u> 3 cartes de même hauteur et une paire
<u>couleur :</u> 5 cartes de même couleur et qui se ne suivent pas
<u>suite :</u> 5 carte qui se suivent et ne sont pas de même couleur
<u>brelan :</u> 3 cartes de même hauteur
<u>double paire :</u> 2 fois 2 cartes de même hauteur
<u>paire :</u> 2 cartes de même hauteur

Exercice 10 (problème de dés)

1. *Quelle est la probabilité de tirer au moins un 6 lorsqu'on jette un dé quatre fois ?*
2. *On répète* n *fois le lancer de deux dés. Calculer la probabilité pour que le six apparaisse au moins une fois. Quelle valeur donner à* n *pour que cette probabilité atteigne* $\frac{1}{2}$ *?*

Exercice 11 *Combien de personnes faut-il pour que la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient leur anniversaire le même mois soit au moins* $\frac{1}{2}$ *? On suppose ici que tous les mois sont équiprobables.*

Exercice 12 (Le modèle fait la probabilité) *Dans un parc il y a trois bancs à deux places. Roger puis Ginette vont s'asseoir « au hasard ». Quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent sur le même banc ?*

- *Montrer que* $p = \frac{1}{3}$.
- *Montrer que* $p = \frac{1}{5}$.
- *Conclusion ?*

Exercice 13 (Politique démographique) *A Bagdad la situation est grave. Le rusé Iznogoud, qui cumule les mandats de grand vizir et de ministre aux harems, est inquiet : il nait environ* 105 *garçcons pour* 100 *filles et il est de plus en plus difficile de se constituer un harem. Il propose donc au khalife d'interdire aux familles d'avoir encore des enfants après la naissance de leur premier fils. Ainsi il y aura plus de filles que de garçons dans la plupart des familles qui désirent toutes un fils. Que lui répond l'avisé khalife Haroun al-Rachid ?*

Exercice 14 (Lemme de Poincaré inverse) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{A}^n$. *Montrer que :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cup ... \cup A_{i_k}) \right)$$

Exercice 15 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. *Montrer que*

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$

(On pourra utiliser la formule des probabilités totales)

Exercice 16 (Loi de succession de Laplace) *On dispose de* $(N+1)$ *urnes numérotées de* 0 *à* N*. L'urne numéro* k *contient* k *boules rouges et* $N-k$ *boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro on tire succesivement* n *boules avec remise. Calculer la probabilité que le* $(n+1)$*ème tirage donne encore une boule rouge sachant qu'au cours des* n *premiers tirages seules des boules rouges ont été tirées. Calculer la limite de cette probabilité quand* N *tend vers* $+\infty$*.*

Exercice 17 *Un laboratoire a mis au point un test pour déceler des souris malades. Des essais prouvent que :*

- *96 fois sur 100, le test donne un résultat positif quand la souris est effectivement malade.*

- *94 fois sur 100, le test donne un résultat négatif quand la souris n'est pas malade.*

Dans une population de souris comprenant 3 % de malades, on pratique le test sur une souris choisie au hasard et on constate que le test donne un résultat positif. Quelle est la probabilité que la souris soit malade ? Commenter le résultat obtenu.

Exercice 18 *Deux urnes* U_1 *et* U_2 *contiennent chacune des boules blanches et des boules noires, dans les proportions* p_1 *et* q_1 *pour* U_1 *et* p_2 *et* q_2 *pour* U_2*. Après chaque tirage dans chaque urne la boule tirée est remise. Les tirages sont fait selon la règle suivante : on choisit au hasard l'une des deux urnes pour le premier tirage ; ensuite on tire dans* U_1 *si la première boule tirée est blanche, dans* U_2 *si la première boule tirée est noire ; de même la* n*-ième boule est tirée dans* U_1 *si la* $(n-1)$*-ième boule tirée est blanche ou noire.*

1. *Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au premier coup ? au second ? au troisième ?*
2. *Soit* π_n *la probabilité de tirer une boule blanche au* n*-ième coup. Trouver une relation entre* π_n *et* π_{n-1}*.*
3. *Montrer que* π_n *tend vers une limite lorsque* $n \to \infty$ *et la calculer.*

Exercice 19 *1) Montrer que si A et B sont deux événements indépendants tels que A entraîne B alors on a : $P(B) = 1$ ou $P(A) = 0$.*

2) Montrer que si A est indépendant de lui même alors $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Exercice 20 *On suppose que A est indépendant de $B \cap C$ et de $B \cup C$, B est indépendant de $C \cap A$ et $C \cup A$, et C indépendant de $A \cap B$ et $A \cup B$. En outre on suppose que $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ sont strictement positives.*

1. *Rappeler la définition de l'indépendance mutuelle*
2. *Montrer que si A et B sont indépendants, A^c et B le sont aussi.*
3. *Montrer que A, B, C sont mutuellement indépendants.*
4. *Même question en supposant seulement A indépendant de $B \cap C$ et de $B \cup C$, B indépendant de $C \cap A$ et C indépendant de $A \cap B$.*

Exercice 21 (Fonction d'Euler) *Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On choisit de manière équiprobable un entier entre 1 et n. Pour tout entier p tel que $0 < p \leq n$, A_p désigne l'évènement "le nombre choisit est divisible par p".*

1. *Que vaut $\mathbb{P}(A_p)$ lorsque p divise n.*
2. *Montrer que si $p_1, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.*
3. *La fonction indicatrice d'Euler ϕ est égale au nombre d'entiers non nuls inférieurs à n et premier avec n. Montrer que*

$$\phi(n) = n \prod_{p \text{ premier, } p \text{ divise } n} (1 - \frac{1}{p})$$

- Variables Aléatoires Discrètes -

Exercice 22 *On lance deux dés équilibrés. On note X la variable aléatoire qui donne le plus grand des numéros obtenus et Y celle qui donne le plus petit.*

Donnez les lois de chacune des deux variables ainsi que les espérances et les variances.

Exercice 23 (Espérance vs écart-type : la roulette) *Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.*

Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne deux fois sa mise si la couleur choisie sort, sinon il perd sa mise.

Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 gagne 36 fois sa mise si le numéro sort.

Il est interdit de miser sur le zéro.

1. *Un joueur mise a € sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de C puis calculez $\mathbb{E}(C)$ et $\sigma(C)$.*
2. *Un joueur mise a € sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouvez la loi de N puis calculez $\mathbb{E}(N)$ et $\sigma(N)$.*
3. *Vaut-il mieux miser sur une couleur ou un numéro ?*

Exercice 24 (Loi géométrique) *On lance une pièce jusqu'à ce qu'on obtienne pile (la probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p), et on note X le nombre de lancers nécessaires.*

1. *Donner la loi de X.*
2. *Calculer $E(X)$, $E(X(X-1))$ et $E(X^2)$.*
3. *Quelle est la loi de $Y = X - 1$? l'espérance et la variance de Y ?*

Exercice 25 (Loi binomiale) *On lance n fois une pièce ; la probabilité d'obtenir pile est p. Soit X le nombre de piles obtenus.*

1. *Donner la loi de X.*
2. *Calculer $E(X)$, $E(X(X-1))$.*

Exercice 26 (Loi d'un couple de v.a.) *On lance un dé à six faces et la variable aléatoire X représente le chiffre obtenu. Si celui-ci est pair, la v.a. Y prend la valeur 1 et 0 sinon.*

1) Déterminer la loi du couple (X, Y).

2) Déterminer la loi de X et la loi de Y.

3) Indiquer si ces v.a. sont indépendantes.

4) Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X+Y)$.

Exercice 27 (Aviation) *On considère les deux avions suivant : un biréacteur B et un triréacteur T.*

On suppose que tous les reacteurs sont identiques, ont la même probabilité p de tomber en panne sur une période donnée et qu'ils sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de réacteurs tombant en panne sur B et Y celle qui donne le nombre de réacteurs tombant en panne sur T.

- *Donnez les lois de probabilité de X et Y en fonction de p. (Pour ré*soudre ce problème d'avions, on pourra s'aider d'arbres.)
- *Calculez les espérances correspondantes.*

– *B a besoin d'au moins un réacteur, sinon il tombe au milieu de l'océan ; T a lui besoin de deux réacteurs pour arriver à destination.*
  – *Calculez, en fonction de p, la probabilité P_B que le biréacteur traverse l'océan sans encombre.*
  – *Calculez la probabilité correspondante P_T pour T.*
  – *Dans quel avion préférez-vous monter pour traverser l'océan ?*

Exercice 28 (Paradoxe) *Le problème est simple : prenons deux boîtes identiques A et B dont l'une contient deux fois plus de pièces d'or que l'autre, mais vous ignorez laquelle. La situation est donc totalement symétrique. Pourtant un expert, qui ignore également quelle est la boîte la mieux lotie, affirme qu'il faut choisir la boîte B ! Son raisonnement semble imparable : soit n le nombre de pièces d'or dans la boîte A, alors la boîte B en contient soit $2n$, soit $n/2$ avec à chaque fois une probabilité de 1/2. Donc on peut calculer l'espérance mathématique du nombre de de pièces d'or X dans la boîte B.*

$$\mathbb{E}(X) = ?$$

Stupeur ! Il vaut mieux choisir la boîte B. Or nous aurions pu tenir exactement le même raisonnement en inversant les rôles de A et B pour aboutir à la conclusion inverse. Nous aboutissons à un magnifique paradoxe. Quel est le problème ?

Exercice 29 (Figaro) *Figaro a deux coiffeuses, Rose et Marie. Le nombre de clientes de Rose et le nombre de clientes de Marie sont indépendants et suivent une loi de Poisson de moyennes respectives λ et μ.*

1. *Calculer le nombre moyen de clientes au total.*
2. *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre total de clientes.*
3. *Sachant qu'il y a n clientes calculer la probabilité pour que Rose en ait k.*

Exercice 30 *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes, $0 \leq Y \leq X$, $\mathbb{E}(X) < +\infty$ et la loi de Y conditionnellement à X est la loi uniforme sur $[|0, X|]$.*

1. *Calculer* $\mathbb{E}(X)$ *en fonction de* $\mathbb{E}(Y)$
2. *Montrer les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
   (a) $X - Y$ *et* Y *sont indépendantes.*
   (b) Y *suit une loi géométrique* ($\mathbb{P}(Y = n) = p(1-p)^n$).

Exercice 31 (Cesaro et convergence en probabilité) *On définit la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires* X_n *vers* X *par :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$$

Soit désormais (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes de loi* $\frac{1}{n}\delta_n + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$.

1. *Calculer* $\mathbb{P}(X_n) = k,\ k \in \mathbb{N}$.
2. *Montrer que* (X_n) *converge en probabilité vers 0.*
3. *Montrer que* $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ *ne converge pas en probabilité vers 0.*

Exercice 32 (Convergence en loi et le théorème des événements rares de Poisson) *On considère une masse donnée d'uranium 238 comprenant des milliards d'atomes* (n) *et on cherche à calculer la loi du nombre* S_n *de noyaux d'Hélium (rayonnement* α*) émis pendant un certain laps de temps que l'on prend assez court. On peut alors supposer que chaque noyau émet indépendemment des autres et que pendant ce laps de temps soit il n'émet rien avec une probabilité* $1 - p_n$ *soit il émet un noyau avec la probabilité* p_n.

1. *Quelle est la loi de* S_n *? Que vaut sa moyenne ?*
2. *Nous faisons par ailleurs l'hypothèse que* $E[S_n]$ *converge et notons* $\lambda = \lim_{n\to\infty} E[S_n]$. *Montrer que* S_n *converge en loi vers une variable aléatoire de Poisson dont on donnera le paramètre.*

   (Définition : dans le cas particulier de l'énoncé, (S_n) *converge en loi vers la variable* S *si quel que soit* $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y = k).)$$

Exercice 33 (vainqueur d'un tournoi)

Partie 1

On considère un tournoi de n participants où le vainqueur est le joueur qui a obtenu le maximum de points. On s'intéresse aux situations où il n'est pas possible de déterminer un seul vainqueur (événément W_n). Pour cela, on note $X_i \in \mathbb{N}$ le nombre de points obtenus par i et on suppose que les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition F.

1. Soit V_n l'événement "il existe un unique vainqueur". Ecrire V_n comme union de n événements disjoints.

2. En déduire la formule

$$P(W_n) = 1 - n \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) F(k-1)^{n-1}$$

3. Montrer que s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F(k_0) = 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n) = 1$$

Commenter le résultat.
On pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant : $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$.

4. On suppose maintenant que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \tag{0.1}$$

a) Vérifier que (0.1) définit bien une loi de probabilité. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \infty$.

b) Montrer que

$$\mathbb{P}(W_n) = 1 - n \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-1}$$

c) Montrer que

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} n(1-x)^{n-1}dx \leq n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{n-1}$$

d) Montrer que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=k)F(k-1)^{n-1} \leq 1 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=k-1)F(k-1)^{n-1}$$

e) Montrer que

$$\mathbb{P}(W_n) \leq \sum_{k=2}^{+\infty} n\left[\mathbb{P}(X=k-1)-\mathbb{P}(X=k)\right]F(k-1)^{n-1}$$

f) En utilisant la question d) et le fait que $\mathbb{P}(X=k-1)/\mathbb{P}(X=k) \to 1$ quand $k \to \infty$, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe M tel que pour tout n,

$$\sum_{k=M}^{+\infty} n\left[\mathbb{P}(X=k-1)-\mathbb{P}(X=k)\right]F(k-1)^{n-1} < \epsilon$$

g) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(W_n)$. Commenter ce résultat.

Partie 2

On s'intéresse maintenant à un tournoi de bilboquets où chaque joueur s'arrête au premier lancer réussi. Le score X_i du joueur i est son nombre de lancers (par exemple, s'il réussit son lancer du premier coup, $X_i = 1$), et le vainqueur est celui qui a le score le plus faible. Comme précédemment, les X_i sont supposés être des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribués. On note $S(k) = \mathbb{P}(X_1 > k)$.

1. Proposer une nouvelle formulation de $\mathbb{P}(W_n)$.

2. On suppose que chaque lancer est indépendant des précédents, et que la probabilité de réussite est la même à chaque lancer. Cette probabilité est notée p, et on suppose $p \in]0,1[$.

a) Calculer la loi de X_1.

b) En déduire $\mathbb{P}(W_n)$. Quelle est la limite de $\mathbb{P}(W_n)$ lorsque $n \to +\infty$? Commenter.

Exercice 34 (Marches aléatoires) *Consiérons le jeu consistant à lancer successivement et indépendemment n fois une pièce de monnaie. Chaque fois que la pièce tombe sur pile, le joueur gagne 1€, sinon il perd 1€. Nous noterons X_k la variable aléatoire correspondant au gain (1 ou -1) du joueur au kième coup. $S_0 = x_0$ correspond à la fortune initiale du joueur et $S_k = S_{k-1} + X_k$ la fortune (peut être négative) après le kième coup. $p \in (0,1)$ est la probabilité d'obtenir pile et $q = 1 - p$ la probabilité d'obtenir face. L'espace d'états d'un jeu consitué de n coups est $\Omega_n = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^n$. On peut représenter une partie complète, un ω de Ω_n, par une ligne brisée joignant les points $(k, S_k(\omega))$ pour $k = 0, \dots, n$ que nous appelerons trajectoire.*

1. *Donner une condition nécéssaire et suffisante pour qu'il existe une trajectoire reliant M de coordonnées (m, μ) et N de coordonnées (n, ν).*
2. *Déterminer le nombre $\mathcal{T}_{N,M}$ de telles trajectoires.*
3. **Principe de réflexion**. *Supposons que $\mu > 0$ et $\nu > 0$ et définissons M' comme le symmétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.*
   - (a) *Montrer qu'il existe autant de trajectoires de M à N touchant l'axe des abscisses que de trajectoires de M' à N.*
   - (b) *Partant de M et arrivant en N, qu'elle est la probabilité que la trajectoire ne coupe pas l'axe des abscisses ?*
   - (c) *Au cours d'un scrutin opposant S et R auquel participe 1000 individus ne votant pas blanc, S a obtenu 600 voix et R 400. Quelle est la probabilité que S ait été majoritaire tout au long du scrutin ?*

(d) *Cent personnes font la queue à un cinéma. Chaque place coûte 5€. Soixante personnes n'ont que des billets de 5€, les autres n'ont que des billets de 10€. Combien faut-il de billets de 5€pour qu'avec une probabilité supérieure ou égale à 95% chacun soit servi dès qu'il se présente ?*

4. **Retours en zéro**. *Nous supposons ici que* $p = q = 1/2$ *et* $S_0 = 0$.
   (a) *Que vaut* $\mu_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ *?*
   (b) *Soit* ν_{2n} *le nombre de trajectoires telles que* $S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0$. *Montrer que* $\nu_{2n} = C_{2n}^n/2$.
   (c) *Montrer que* $\mu_{2n} = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0)$.
   (d) *Soient les ensembles de trajectoires*

$$\begin{aligned} B_{2n} &= \{S_1 \geq 0, \ldots, S_{2n} \geq 0\} \\ A_{2n+1} &= \{S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0\}. \end{aligned}$$

   Montrer que ces deux ensembles ont même cardinal et en déduire que $\mu_{2n} = \mathbb{P}(B_{2n})$.
   (e) *Montrer que la probabilité de revenir en 0 au temps 2n pour la première fois vaut* $\mu_{2n-2} - \mu_{2n}$.

Exercice 35 (Application des fonctions génératrices) *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et* $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, *la fonction génératrice* G_X *de* X *est définie pour* $s \in \mathbb{R}$ *par*

$$G_X(s) = E[s^X].$$

1. *Montrer que le rayon de convergence de la série entière associée à G est supérieur ou égal à 1.*
2. *Montrer que* G_X *caractérise la loi de* X.
3. *Que vaut* G_{X+Y} *lorsque* X *et* Y *sont indépendantes ?*
4. **Loi binomilae négative**. *Dans un jeu de Pile ou Face la probabilité d'avoir Pile est* p *où* $0 < p < 1$ *et celle d'avoir Face est* $q = 1 - p$. *Soit* S_r *le nombre de jets nécessaires pour obtenir r fois Pile.*
   (a) *Calculer la fonction génératrice* G_r *de* S_r *(traiter dans un premier temps le cas* $r = 1$*).*

(b) *En déduire la loi de* S_r *(utiliser que pour* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *et* $|x| < 1$, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k$ *avec* $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, *si* $k \geq 1$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$*)*

5. **Application au processus de branchement**. *On étudie la transmission d'un nom de famille. Soit* Z_n *le nombre d'hommes à la génération* n *portant un nom X. Nous supposons que* $Z_0 = 0$. *Pour chaque homme de nom X, quelle que soit la génération, la loi du nombre de fils* X *est la même et nous notons* p_k *la probabilité qu'un homme ait k fils. Nous supposons que* $0 < p_0 < 1$ *et définissons* $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$.

   (a) *Donner une relation de récurrene permettant de calculer la fonction géneratrice* G_n*de* Z_n.

   (b) *Montrer que* G *est strictement croissante sur [0,1], qu'elle est convexe sur* $(0,1)$. *Donner une conditions nécessaire et suffisante pour que cette convexité soit stricte. En déduire que* $G(x)-x$ *admet exactement une ou deux racine(s) sur* $[0,1]$. *Etudier la convergence de la suite* x_n *et sa limite en fonction de* $m = \mathbb{E}[X]$. *Conclure sur le problème de l'extinction du nom* X.

- Variables Aléatoires Continues -

Exercice 36 *Soit* X *une v.a.r. suivant une loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$.

1. *Pour* $s, t > 0$, *calculer* $P(X > s)$ *puis* $P(X > s + t \mid X > t)$.
2. *Si* X *représente la durée de vie d'un composant électronique, comment peut-on interpréter cette propriété ?*
3. *Application : On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 0.01. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure encore au moins 10 jours, sachant qu'à son n-ème jour, elle marche encore ?*

Exercice 37 *La durée de vie, exprimée en années, d'un circuit électronique est une variable aléatoire* T *dont la fonction de répartition* F *est définie par :*

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp(-\frac{1}{2}t^2) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. *Donner la densité de probabilité* f *de* T.
2. *Sachant que le circuit a déjà fonctionné durant 1 an, quelle est la probabilité qu'il continue a fonctionner encore durant au moins 2 ans ? La loi est-elle sans mémoire ?*
3. *Montrer qu'une loi sans mémoire (et pour simplifier à densité continue) est forcément une loi exponentielle.*

Exercice 38 *Soit* X *une v.a.r. de densité de probabilité* f *:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. *Déterminer la fonction de répartition et la densité de* X^3.
2. *Déterminer la fonction de répartition et la densité de* $2X + 1$.

Exercice 39 (Grandes Déviations) *1. Soit (X_i) une suite de v.a.r. i.i.d de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et S_n les sommes partielles des n premières valeurs. Fixons $\delta > 0$, montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \delta\right) = -\frac{\delta^2 n}{2\sigma^2}.$$

2. *Supposons désormais que nous ne faisions pas d'hypothèse de loi mais supposions simplement que les variables sont i.i.d. de moyenne m. Montrer que pour $a > m$*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq -\Lambda^*(a)$$

   où

$$\Lambda^*(a) = \sup_{\theta>0}(a\theta - \Lambda(\theta))$$

   et

$$\Lambda(\theta) = \log \mathbb{E}[\exp(\theta X_1)],$$

   cette dernière fonction est la fonction des cumulants de la loi de X_1.

3. *Montrer que Λ est une fonction convexe et que son ensemble de définition ($\{\theta \in \mathbb{R} : \ \Lambda(\theta) < \infty\}$) est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

4. *Calculer la borne supérieure obtenue dans la question 2 dans le cas où X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p et une loi exponentielle de paramètre λ.*

5. *Comparer ces bornes avec celles obtenues en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*