MASTER M2 NUMERICAL ANALYSIS AND P.D.E.s
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire et F. Alouges, "Homogenization"
Jeudi 10 janvier 2013 (3 h)

Important: La notation des copies prendra en compte la clarté et la qualité de la rédaction. Le sujet est composé de trois parties. Les questions II.5 à II.9 ne doivent être traitées QUE par les étudiants de mathématique et pas par ceux inscrits dans la filière de mécanique (M4S). Les correcteurs sont conscients de la difficulté et de la longueur du sujet. Le barème est donné juste à titre indicatif et est censé refléter la difficulté relative de chacune des parties.

Comme d'habitude l'indice # indique un espace de fonctions périodiques. Dans tout le problème, C désigne une constante qui ne dépend pas de ϵ.

Le but de ce problème est d'étudier l'influence d'un terme d'ordre 0 dans le processus d'homogénéisation d'une équation de diffusion. Un tel terme d'ordre 0 modélise une réaction ou un processus d'absorption. Trois différents scalings sont considérés.

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ qui représente un milieu périodique. Soit $\epsilon > 0$ un petit paramètre qui définit la périodicité des coefficients. Soit $Y = [0,1]^N$ la cellule unité. Le tenseur de diffusion est $A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ où $A(y) \in L^\infty_\#(Y)^{N\times N}$ est une matrice symétrique périodique et uniformément coercive qui vérifie $\exists 0 < \alpha \leq \beta$,

$$\alpha|\xi|^2 \leq A(y)\xi\cdot\xi \leq \beta|\xi|^2, \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^N, y \in Y.$$

Une espèce chimique est diffusée dans le domaine et peut réagir avec le milieu par absorption/désorption. Le coefficient de réaction est $c\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ où $c(y) \in L^\infty_\#(Y)$ est un coefficient borné et périodique (sans signe spécifique). La concentration de l'espèce est dénotée par $u_\epsilon(t,x)$. La concentration initiale est $u_{in}(x) \in H^1_0(\Omega)$. Le modèle que l'on considère est l'équation d'évolution pour cette concentration:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \dfrac{1}{\epsilon^\gamma} c\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right) u_\epsilon - \operatorname{div}\left(A\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon\right) = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,T), \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T), \\ u_\epsilon(x,0) = u_{in}(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\gamma = 0, 1, 2$ est un entier dont les différentes valeurs seront traitées dans les trois différentes parties de ce problème.

Partie I (4 points)

Dans cette partie (qui est une généralisation directe du cours), on étudie le cas le plus simple, $\gamma = 0$, du modèle (1). On applique la méthode formelle des développements à deux échelles pour trouver le problème homogénéisé pour (1). On suppose donc que l'on peut écrire u_ϵ comme une série

$$u_\epsilon(t,x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i(t,x,\frac{x}{\epsilon}) \tag{2}$$

où les fonctions $y \to u_i(t,x,y)$ sont Y-périodiques.

1. Ecrire les équations satisfaites par u_0, u_1, et u_2 dans la cellule Y.
2. Rappeler l'alternative de Fredholm ou la condition de compatibilité que doit vérifier le terme source $g(y) \in L^2_\#(Y)$ pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution $w \in H^1_\#(Y)/\mathbb{R}$ (à une constante additive près) de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y\,(A(y)\nabla_y w) = g & \text{dans } Y \\ y \to w(y)\ Y\text{-périodique.} \end{cases} \tag{3}$$

3. Déduire que $u_0(t,x,y)$ de dépend pas de y, et que $u_1(t,x,y)$ peut s'écrire en fonction du gradient de u_0 multiplié par des solutions de problèmes de cellule que l'on explicitera.
4. Ecrire la condition nécessaire et suffisante de compatibilité pour résoudre en $u_2(t,x,y)$. En déduire l'équation homogénéisée. Que deviennent la condition sur le bord $\partial\Omega$ et la condition initiale ?

Partie II
(II.1 à II.4:10 points
III.5 à II.9: 8 points)

Dans cette partie, on traite le cas $\gamma = 1$ dans le modèle (1). On fait l'hypothèse supplémentaire

$$\int_Y c(y)\,dy = 0. \tag{4}$$

On utilise de nouveau la méthode formelle du dévelopement à deux échelles, i.e., on suppose que u_ϵ peut s'écrire sous la forme (2).

1. Ecrire les équations satisfaites par u_0, u_1, et u_2 dans la cellule Y.
2. En déduire que $u_0(t,x,y)$ ne dépend pas de y, et que $u_1(t,x,y)$ peut s'écrire comme

$$u_1(t,x,y) = w_0(y)u_0(t,x) + \sum_{k=1}^{N} w_k(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_k}(t,x)$$

   où $(w_k)_{1\le k\le N}$ sont les solutions du problème de cellule habituel et w_0 est la solution d'un nouveau problème de cellule que l'on explicitera soigneusement. Montrer que (4) est nécessaire pour résoudre en w_0.

3. Discuter l'approximation numérique de w_0 par la méthode des éléments finis P^1 sur la cellule Y. En particulier, si l'on appelle h le pas du maillage sous-jacent de Y, donner les formulations variationnelles exacte et approchée et l'estimation d'erreur entre la solution exacte w_0 et l'approchée $w_{0,h}$ en fonction de h. Pour cette question, on pourra supposer que $A \in \mathcal{C}^\infty(Y)$.

4. Donner la condition de compatibilité nécessaire et suffisante pour pouvoir résoudre en $u_2(t,x,y)$. Montrer que l'équation homogénéisée est de la forme

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + c^* u_0 + b^* \cdot \nabla_x u_0 - \mathrm{div}_x \left(A^* \nabla_x u_0\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T),$$

avec des formules précises pour c^*, b^* et A^*. En utilisant les problèmes de cellule, montrer que $b^* = 0$ et $c^* \leq 0$ (ce qui montre en particulier qu'il n'y a pas de terme convectif dans l'équation homogénéisée).

Le reste de la partie II NE DOIT PAS être traité par les étudiants de M4S (mécanique). Ils doivent directement aller à la partie III.

---

5. On s'attache maintenant à la justification rigoureuse du processus d'homogénéisation. Pour simplifier l'analyse, on applique d'abord la transformée de Laplace à (1). Pour un paramètre $p > 0$, on définit

$$\hat{u}_\epsilon(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u_\epsilon(t,x)\, dt,$$

et on suppose que pour p suffisamment grand, la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $e^{-pt}u_\epsilon(t,x)$ est nulle dans $H_0^1(\Omega)$. Montrer que (1) donne

$$\begin{cases} p\,\hat{u}_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon} c\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right) \hat{u}_\epsilon - \mathrm{div}\left(A\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)\nabla \hat{u}_\epsilon\right) = u_{in} & \text{dans } \Omega, \\ \hat{u}_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

On va justifier l'homogénéisation de (5) au lieu de celle de (1).

6. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs $b(y) \in L^\infty_\#(Y)^N$ tel que

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y b(y) = c(y) & \text{dans } Y \\ y \to b(y) \ Y\text{-périodique.} \end{cases} \tag{6}$$

(Indication: Chercher $b = \nabla_y \phi$.)

7. Montrer que, pour $p > 0$ suffisamment grand, il existe une unique solution de (5) dans $H_0^1(\Omega)$ et que la famille $\hat{u}_\epsilon(x)$ est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

8. Appliquer la méthode de la convergence à double échelle à (5) et montrer que la famille $\hat{u}_\epsilon$ converge (dans un sens à préciser) vers une limite $\hat{u}_0$ qui est solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} p\,\hat{u}_0 + c^*\hat{u}_0 - \mathrm{div}_x\left(A^*\nabla_x \hat{u}_0\right) = u_{in} & \text{dans } \Omega, \\ \hat{u}_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec les mêmes coefficients c^* et A^* qu'à la question II.3.

9. On considère maintenant pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{E}_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(pu^2(x) + \frac{1}{\epsilon}c\left(\frac{x}{\epsilon}\right)u^2(x)\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u(x)\cdot\nabla(x)\,dx$$

et

$$\mathcal{E}_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (p + c^*)\,u^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A^*\nabla u(x)\cdot\nabla(x)\,dx.$$

On considère aussi les problèmes de minimisation

$$(P_\epsilon) \quad \min_{u\in H_0^1(\Omega)} \mathcal{E}_\epsilon(u)\,,$$

et

$$(P_0) \quad \min_{u\in H_0^1(\Omega)} \mathcal{E}_0(u)\,,$$

Le but des questions suivantes est de montrer que la famille de problèmes de minimisation $(P_\epsilon)_\epsilon$ $\Gamma-$converge vers P_0 dans $H^1(\Omega)$ pour la convergence faible H^1.

   (a) Montrer que si une famille $(u_\epsilon)_\epsilon$ d'applications $H_0^1(\Omega)$ est telle que $\mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) < C$, alors elle est bornée indépendamment de ϵ dans $H^1(\Omega)$. (Indication: utiliser $c = -\mathrm{div} b$ et intégrer le terme correspondant par parties.)

   (b) Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ et $(u_\epsilon)_\epsilon$ une famille d'applications de $H_0^1(\Omega)$ telle que
   $$u_\epsilon \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } H^1(\Omega)\,.$$
   Montrer que
   $$\liminf_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) \geq \mathcal{E}_0(u_0).$$

   (c) Réciproquement, construire une famille $(v_\epsilon)_\epsilon$ d'applications $H_0^1(\Omega)$ telle que
   $$v_\epsilon \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } H^1(\Omega)$$
   et qui vérifie
   $$\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) = \mathcal{E}_0(u_0).$$

   (d) Conclure.

Partie III
(III.1 à III.3:6 points
III.4 à III.5: optionelles 4 points)

Dans cette partie on considère le cas $\gamma = 2$, dans le modèle (1) et sans aucune hypothèse sur le coefficient $c(y)$. De nouveau, on utilise la méthode formelle du développement à deux échelles mais avec un ansatz différent cette fois

$$u_\epsilon(t,x) = e^{-\epsilon^{-2}\lambda t} \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i(t, x, \frac{x}{\epsilon}) \tag{7}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre à déterminer et avec des fonctions $y \to u_i(t,x,y)$ Y-périodiques.

1. Montrer que λ et u_0 vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} c(y)u_0 - \mathrm{div}_y \left(A(y)\nabla_y u_0\right) = \lambda\, u_0 \quad \text{dans } Y \\ y \to u_0(t,x,y)\ Y\text{-périodique.} \end{array} \right. \tag{8}$$

Le système (8) s'interprête comme un problème spectral: λ est une valeur propre et u_0 est la fonction propre correspondante. Comme d'habitude (t,x) sont juste des paramètres dans (8) où la seule variable pertinente est $y \in Y$.

Nous rappelons quelques résultats de base que nous admettons dans la suite. Le système (8) admet un nombre infini de solutions indépendantes, avec des valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et des fonctions propres correspondantes $\psi_i(y) \in H^1_\#(Y)$ (définies à une constante multiplicative près) ordonnées par ordre croissant

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$$

On normalise également les fonctions propres de sorte que $\|\psi_i\|_{L^2(Y)} = 1$. De plus la première fonction propre $\psi_1(y)$ (correspondant à la plus petite valeur propre λ_1) est la seule qui soit positive sur Y. Du point de vue physique, si l'on interprête les fonctions propres $\psi_i(y)$ comme des concentrations (qui doivent donc être à valeurs positives) seule la première fonction propre a un sens physique. Ainsi, on admet que la solution de (8) s'écrit

$$\lambda = \lambda_1, \quad u_0(t,x,y) = u(t,x)\,\psi_1(y),$$

où $u(t,x)$ est une constante multiplicative à déterminer.

2. Pour $g(y) \in L^2_\#(Y)$, on considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} c(y)w - \mathrm{div}_y \left(A(y)\nabla_y w\right) - \lambda_1\, w = g \quad \text{dans } Y \\ y \to w(y)\ Y\text{-périodique.} \end{array} \right. \tag{9}$$

Montrer que si $w \in H^1_\#(Y)$ est une solution, alors $w + C\psi_1$ est aussi une solution pour toute constante C. Montrer qu'une condition nécessaire pour pouvoir résoudre (9) est que

$$\int_Y g(y)\,\psi_1(y)\,dy = 0. \tag{10}$$

(Indication: multiplier l'équation par ψ_1 et intégrer par parties.)

A partir de maintenant, on admet que (10) est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution $w \in H^1_\#(Y)$ de (9), qui est unique à l'addition près d'un multiple de ψ_1 (c'est encore une alternative de Fredholm).

3. En revenant à l'ansatz (7) montrer que, pour $i = 1$ et 2, u_i vérifie

$$\begin{cases} c(y)u_i - \mathrm{div}_y\,(A(y)\nabla_y u_i) - \lambda_1\,u_i = g_i & \text{dans } Y \\ y \to u_i(t,x,y)\ Y\text{-périodique,} \end{cases} \tag{11}$$

où les termes sources sont donnés par

$$g_1 = \mathrm{div}_y(A(y)\nabla_x u_0) + \mathrm{div}_x(A(y)\nabla_y u_0)$$

et

$$g_2 = -\frac{\partial u_0}{\partial t} + \mathrm{div}_x\,(A(y)(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)) + \mathrm{div}_y(A(y)\nabla_x u_1).$$

Les deux dernières questions sont optionnelles et pourraient valoir jusqu'à 4 points additionnels.

---

4. Vérifier que g_1 satisfait la condition de compatibilité (10) et montrer que

$$u_1(t,x,y) = \sum_{k=1}^{N} z_k(y)\frac{\partial u}{\partial x_k}(t,x)$$

où $(z_k)_{1\le k\le N}$ sont des solutions de nouveaux problèmes de cellule à déterminer.

5. Ecrire la condition de compatibilité nécessaire et suffisante (10) pour g_2 et en déduire que l'équation homogénéisée est du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}_x\,(A^*\nabla_x u) = 0 \quad \text{dans } \Omega\times(0,T),$$

avec une expression explicite pour A^* en fonction de (z_k).