ECOLE POLYTECHNIQUE – Promotion 2013
Approximation Numérique et Optimisation (MAP411)

Examen classant du 21 janvier 2015
Durée : 3 heures

Sujet proposé par X. Blanc

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice I. Minimisation sous contrainte (5 points)

On considère un vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^d$, où $d \in \mathbb{N}^*$, et une matrice Q carrée réelle de taille d, qui est symétrique définie positive. On fixe $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème de minimisation

$$\min \left\{ a \cdot x - b, \quad \text{sous les contraintes} \quad \frac{1}{2} Qx \cdot x \leq c, \; a \cdot x \leq 0 \right\}. \tag{1}$$

Question 1. Que dire de ce problème dans le cas où $c \leq 0$? On supposera dans la suite que $c > 0$.

Question 2. Démontrer que le problème (1) admet une solution.

Question 3. Écrire le Lagrangien du problème (1).

Question 4. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que Qx et a ne sont pas colinéaires. Les contraintes sont-elles qualifiées en x ?

Question 5. On considère dans cette question un point x^* solution de (1) tel que Qx^* et a ne sont pas colinéaires. Que peut-on dire de x^* ?

Question 6. Déterminer la ou les solution(s) de (1).

Exercice II. Équation de Laplace (7 points)

Soit $\Omega =]0, 1[$. On note $\partial\Omega = \{0, 1\}$ sa frontière. On s'intéresse à la résolution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u + \gamma \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Les fonctions f et g sont supposées être des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, et le réel γ est strictement positif. La deuxième ligne du système peut donc également s'écrire

$$u(0) - \gamma \frac{du}{dx}(0) = g(0), \quad u(1) + \gamma \frac{du}{dx}(1) = g(1).$$

De plus, on notera $\alpha = g(0)$ et $\beta = g(1)$.

Question 1. On utilise, pour discrétiser l'équation (6), un maillage uniforme :

$$x_i = jh, \quad 0 \le j \le n+1, \quad h = \frac{1}{n+1}, \quad n \ge 1. \tag{3}$$

On notera $f_j = f(x_j)$, et u_j une approximation aux différences finies de $u(x_j)$. Écrire les formules aux différences finies centrées permettant de discrétiser la première ligne du système (6), pour $0 \le j \le n+1$. On utilisera la quantité u_{-1} comme approximation de u au point fictif $-h$, u_{n+2} comme approximation de u au point fictif $1+h$, à définir ensuite.

Question 2. On propose de discrétiser les conditions de bord sous la forme

$$\gamma\frac{u_{-1}-u_0}{h} + u_0 = \alpha, \quad \gamma\frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{h} + u_{n+1} = \beta.$$

Insérer ces expressions dans les termes $j=0$ et $j=n+1$, respectivement, du schéma. En supposant que $f(0)=f(1)=0$, démontrer que le schéma ainsi obtenu est consistant d'ordre 1 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\left\|(u_j)_{0\le j\le n+1}\right\|_\infty = \sup_{0\le j\le n+1} |u_j| \tag{4}$$

Question 3. Proposer une approximation d'ordre 2 des conditions de bord qui permette d'obtenir, pour les indices $j=0$ et $j=n+1$, respectivement,

$$2\gamma\frac{u_0-u_1}{h^2} + \frac{2}{h}(u_0-\alpha) = \gamma f_0, \qquad 2\gamma\frac{u_{n+1}-u_n}{h^2} + \frac{2}{h}(u_{n+1}-\beta) = \gamma f_{n+1} \tag{5}$$

Démontrer que le schéma ainsi défini est consistant pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et déterminer son ordre (on ne fait pas ici d'hypothèse sur les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$).

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que le schéma utilisé est celui de la question 3. On admettra que, pour tout f et tout α, β, le système correspondant admet une unique solution u.

Question 4. Supposons que $f \ge 0$ et $g \ge 0$. Soit j_0 un indice où $(u_j)_{0\le j\le n+1}$ (solution du schéma) est minimale. Déterminer le signe de u_{j_0}, et en déduire que $u \ge 0$.

Question 5. On suppose dans cette question que $f = 0$.
5.a. Démontrer que $(u_j)_{0\le j\le n+1}$ atteint son maximum en $j=0$ ou $j=n+1$.
5.b. En déduire que $\forall j,\ 0 \le j \le n+1, \quad u_j \le \max(\alpha,\beta)$.
5.c. Démontrer que $\forall j,\ 0 \le j \le n+1, \quad |u_j| \le \max(|\alpha|,|\beta|)$.

Question 6. Montrer que, si $f \le M$ et $g = 0$, alors la solution u du schéma vérifie $u_j \le M$, pour tout j compris entre 0 et $n+1$. On pourra pour cela utiliser le vecteur $v_j = u_j - \frac{1}{2}M\ hj\ (1-hj)$.

Question 7. En déduire que le schéma est stable, c'est-à-dire que la solution u du schéma vérifie

$$\|u\|_\infty \le \|f\|_\infty + \max(|\alpha|,|\beta|),$$

où, pour tout vecteur v, $\|v\|_\infty$ est définie par (4).

Question 8. L'objectif de cette question est de prouver la convergence du schéma. On note donc $(u_j)_{1\le j\le n+1}$ la solution du schéma, et $u(x)$ la solution exacte de l'équation (6), que l'on supposera de classe C^4.
8.a. Soit, pour tout j tel que $0 \le j \le n+1$, $e_j = u_j - u(x_j)$. Écrire le système vérifié par le vecteur $(e_j)_{0\le j\le n+1}$
8.b. En déduire que le schéma est convergent.

Exercice III. Décomposition de domaine (8 points)

On reprend dans cet exercice le système (6) en dimension quelconque avec $\gamma = 0$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

On rappelle que la formulation variationnelle du problème (6) s'écrit : trouver $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que $u = g$ sur $\partial\Omega$, et

$$\forall v \in V_0, \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v, \tag{7}$$

avec

$$V_0 = \left\{ \varphi \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{tel que} \quad \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Question 1. On admet que cette formulation variationnelle admet une solution. Démontrer qu'elle est unique.

Pour de faibles valeurs du pas de discrétisation, la résolution numérique du système peut devenir chère. Dans un tel cas, on peut par exemple utiliser une méthode de décomposition de domaine : on sépare Ω en sous-domaines Ω_i, pour $1 \leq i \leq I$, et on résout le problème sur chaque Ω_i. Ensuite, on les "assemble" pour reconstruire une solution du système de départ. C'est cet algorithme que nous allons étudier maintenant. Pour simplifier, nous supposerons que $I = 2$, de sorte que

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$

On note

$$\Gamma_{12} = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2, \quad \Gamma_1 = \overline{\Omega}_1 \cap \partial\Omega, \quad \Gamma_2 = \overline{\Omega}_2 \cap \partial\Omega.$$

On propose l'algorithme suivant : on note $\left(\widetilde{u}_1^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\widetilde{u}_2^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies par

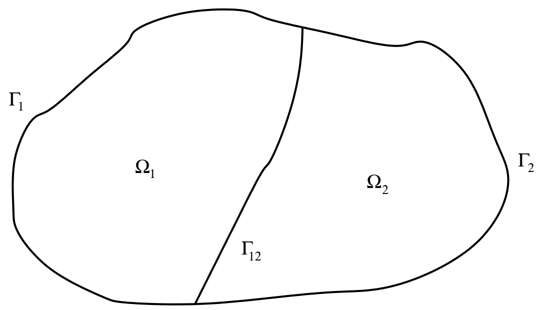

Figure 1: Décomposition du domaine Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2.

récurrence par les problèmes suivants:

$$\begin{cases} -\Delta \widetilde{u}_1^{k+1} = f & \text{dans } \Omega_1, \\ \widetilde{u}_1^{k+1} = g & \text{sur } \Gamma_1, \\ \widetilde{u}_1^{k+1} = \widetilde{u}_2^k & \text{sur } \Gamma_{12}. \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta \widetilde{u}_2^{k+1} = f & \text{dans } \Omega_2, \\ \widetilde{u}_2^{k+1} = g & \text{sur } \Gamma_2, \\ \widetilde{u}_2^{k+1} = \widetilde{u}_1^k & \text{sur } \Gamma_{12}. \end{cases} \tag{8}$$

Les suites $\left(\widetilde{u}_1^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\widetilde{u}_2^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont initialisées par des valeurs arbitraires $\widetilde{u}_1^0$ et $\widetilde{u}_2^0$, par exemple la fonction nulle.

Question 2. On se place (uniquement pour cette question) en dimension $d = 1$, avec $f = 0$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. On suppose que $\Omega =]0, 1[$, $\Omega_1 =]0, \frac{1}{2}[$ et $\Omega_2 =]\frac{1}{2}, 1[$.

2.a. En supposant que $\widetilde{u}_1^0 = 0$ et $\widetilde{u}_2^0 = 1$, calculer explicitement les suites $\left(\widetilde{u}_1^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\widetilde{u}_2^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
2.b. Que peut-on dire de la convergence des suites $\left(\widetilde{u}_1^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\widetilde{u}_2^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$?

Dans toute la suite, on suppose que $\lambda > 0$ est un paramètre fixe, et on considère l'algorithme suivant :

$$\left\{\begin{aligned} -\Delta u_1^{k+1} &= f \quad \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^{k+1} &= g \quad \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n_{12}} + \lambda u_1^{k+1} &= -\frac{\partial u_2^k}{\partial n_{21}} + \lambda u_2^k \quad \text{sur } \Gamma_{12}. \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} -\Delta u_2^{k+1} &= f \quad \text{dans } \Omega_2, \\ u_2^{k+1} &= g \quad \text{sur } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial n_{21}} + \lambda u_2^{k+1} &= -\frac{\partial u_1^k}{\partial n_{12}} + \lambda u_1^k \quad \text{sur } \Gamma_{12}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Il faut bien noter que, dans les expressions ci-dessus, $n_{12} = -n_{21}$, car n_{12} est la normale sortante de Ω_1 vers Ω_2, et n_{21} la normale sortante de Ω_2 vers Ω_1.

Question 3. Soit $k \geq 1$. Écrire les problèmes aux limites dont sont solutions $u_1^{k+1} - u_1^{k-1}$ et $u_2^{k+1} - u_2^{k-1}$. En particulier, on montrera que les conditions de bord sur Γ_{12} s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial n_{12}}\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right) = \lambda\left(2u_2^k - u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right), \quad \frac{\partial}{\partial n_{21}}\left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1}\right) = \lambda\left(2u_1^k - u_2^{k+1} - u_2^{k-1}\right) \tag{10}$$

Question 4. Écrire les problèmes variationnels dont sont solutions les fonctions $u_1^{k+1} - u_1^{k-1}$ et $u_2^{k+1} - u_2^{k-1}$, respectivement. On supposera que les fonctions inconnues sont dans $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Question 5. En utilisant $u_1^{k+1} - u_1^{k-1}$ et $u_2^{k+1} - u_2^{k-1}$, respectivement, comme fonctions test dans ces formulations variationnelles, démontrer que

$$\int_{\Omega_1}\left|\nabla\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right)\right|^2 + \lambda\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^k - u_1^{k+1}\right)^2 = \lambda\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k-1} - u_2^k\right)^2, \tag{11}$$

$$\int_{\Omega_2}\left|\nabla\left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1}\right)\right|^2 + \lambda\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^k - u_2^{k+1}\right)^2 = \lambda\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^{k-1} - u_1^k\right)^2. \tag{12}$$

Question 6. En déduire que les suites $\displaystyle\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^k - u_1^{k+1}\right)^2$ et $\displaystyle\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^k - u_2^{k+1}\right)^2$ sont bornées.

Question 7. Démontrer que la série de terme général

$$\int_{\Omega_1}\left|\nabla\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right)\right|^2 + \int_{\Omega_2}\left|\nabla\left(u_2^{k+1} - u_2^{k-1}\right)\right|^2,$$

est convergente.

Question 8. En utilisant u_1^{k+1} comme fonction test dans la formulation variationnelle vérifiée par $u_1^{k+1} - u_1^{k-1}$, démontrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left|\nabla\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right)\right|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left|\nabla u_1^{k+1}\right|^2 + \frac{\lambda}{2}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k+1}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k-1}\right)^2 + \lambda\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k+1} - u_2^k\right)^2 \\ = \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left|\nabla u_1^{k-1}\right|^2 + \lambda\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^k\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k+1} - u_1^{k-1}\right)^2. \end{aligned}$$

On admettra que la même égalité est vraie en échangeant les indices 1 et 2.

Question 9. En déduire que, si λ est assez petit, les suites $\displaystyle\int_{\Omega_1}\left|\nabla u_1^k\right|^2$ et $\displaystyle\int_{\Omega_2}\left|\nabla u_2^k\right|^2$ sont bornées. On utilisera pour cela, le résultat (dit inégalité de trace) suivant (sans le démontrer) : il existe $C_1 > 0$ tel que si $u_1 \in C^1(\overline{\Omega}_1)$, et si $u_1 = 0$ sur Γ_1, alors

$$\int_{\Gamma_{12}} u_1^2 \leq C_1\int_{\Omega_1}|\nabla u_1|^2.$$

On utilisera également la même inégalité où on échange les indices 1 et 2.

Question 10. Démontrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$2\sum_{k=1}^{N}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k+1}-u_2^{k}\right)^2+2\sum_{k=1}^{N}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^{k+1}-u_1^{k}\right)^2\leq C+\sum_{k=1}^{N}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_1^{k+1}-u_1^{k-1}\right)^2+\sum_{k=1}^{N}\int_{\Gamma_{12}}\left(u_2^{k+1}-u_2^{k-1}\right)^2,$$

où la constante C ne dépend pas de N.

Question 11. On admet que les propriétés ci-dessus impliquent que les suites $\left(u_1^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_1^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $\overline{\Omega}_1$ et $\overline{\Omega}_2$, respectivement. On suppose de plus que la même convergence a lieu pour les gradients de ces fonctions. Utiliser leur limite pour construire une fonction $u \in C^0(\overline{\Omega})$ solution du problème variationnel (7).