

Suivre l'activité des poumons à l'aide d'électrodes

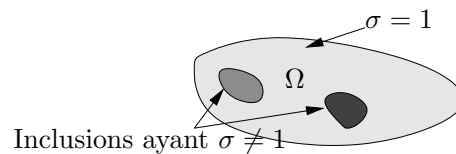
Houssem Haddar
(Houssem.Haddar@inria.fr)

MAP431, année 2013/2014

1 Introduction

Le but de ce projet est d'étudier puis implémenter et tester un algorithme rapide (issu de la Méthode de Factorisation) permettant de visualiser la conductivité d'un milieu à l'aide de mesures de potentiels faites par des électrodes réparties sur la surface du milieu sondé. Cette technique s'appelle "imagerie par impédance électrique". Elle est notamment utilisée en imagerie médicale pour visualiser des régions à forte teneur en sang (et donc à grande conductivité) : par exemple les poumons.

L'expérimentation consiste à entourer le domaine sondé, que l'on désignera dans la suite par Ω par des électrodes posées sur sa frontière. On applique alors un champ électrique E et on mesure le potentiel résultant u sur la frontière $\partial\Omega$. Le potentiel est défini par $E = \nabla u$. Si on note σ la conductivité du milieu, alors le potentiel u vérifie (en combinant la loi d'Ohm et l'équation de Gauss)



$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma \nabla u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial u / \partial \nu = g & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

avec ν la normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω et $g (= E \cdot \nu)$ désignant le courant appliqué à la frontière de Ω .

Pour simplifier l'analyse nous allons supposer que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné régulier simplement connexe et que la conductivité σ est constante égale à 1 à l'extérieur d'un

domaine D et que σ est une fonction bornée définie positive, c.à.d.

$$0 < \sigma_* \leq \sigma(x) \leq \sigma^* < \infty \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

On supposera aussi que $\Omega \setminus \overline{D}$ est un ouvert régulier connexe. On note $L_\diamond^2(\partial\Omega)$ le sous espace de $L^2(\partial\Omega)$ constitué des fonctions à moyenne nulle

$$L_\diamond^2(\partial\Omega) := \left\{ v \in L^2(\partial\Omega); \int_{\partial\Omega} v \, ds = 0 \right\}.$$

On note également

$$H_\diamond^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega); \int_{\partial\Omega} v \, ds = 0 \right\}.$$

Question 1. Montrer que pour tout $g \in L_\diamond^2(\partial\Omega)$ le problème (1) admet une solution (variationnelle) unique $u \in H_\diamond^1(\Omega)$.

On définit alors $\Lambda : L_\diamond^2(\partial\Omega) \rightarrow L_\diamond^2(\partial\Omega)$ par

$$\Lambda(g) = u|_{\partial\Omega}$$

où $u \in H_\diamond^1(\Omega)$ est solution de (1).

Question 2. Montrer que Λ est continu.

Le problème que l'on souhaite résoudre est celui de reconstruire le domaine D (qui est en quelque sorte caractérisé par le support de $\sigma \neq 1$) à partir de la connaissance de Λ . En pratique, mesurer Λ revient à mesurer Λg_i pour g_1, g_2, \dots, g_N où $\{g_i, i = 1, \dots, \infty\}$ désigne une base de $L_\diamond^2(\partial\Omega)$.

L'algorithme que nous allons considérer repose sur la construction d'une indicatrice de D à partir du rang de l'opérateur Λ . Nous allons dans un premier temps donner quelques éléments de la justification théorique de la méthode (sans faire l'analyse complète, qui demande un peu plus de prérequis).

2 Fondement théorique de l'algorithme d'imagerie

Introduisons $\Lambda_0 : L_\diamond^2(\partial\Omega) \rightarrow L_\diamond^2(\partial\Omega)$ défini par

$$\Lambda_0(g) = u_0|_{\partial\Omega}$$

où $u_0 \in H_\diamond^1(\Omega)$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial u / \partial \nu = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

Remarquons que l'opérateur Λ coïncide avec Λ_0 lorsque $D = \emptyset$. L'information sur D semble alors plus apparente dans la différence $\Lambda - \Lambda_0$. Remarquons aussi que, vis à vis du problème de détermination de D , l'opérateur Λ_0 est quelque chose de connu puisqu'il ne dépend pas de σ .

La justification de la méthode repose sur une certaine factorisation de l'opérateur $\Lambda - \Lambda_0$.

On définit

$$H : L^2_\diamond(\partial\Omega) \rightarrow H^1(D)$$

par $Hg = u_0|_D$ où $u_0 \in H^1_\diamond(\Omega)$ est solution (2) et on définit

$$L : H^1(D) \rightarrow L^2_\diamond(\partial\Omega)$$

par $L(h) = w|_{\partial\Omega}$ où $w \in H^1_\diamond(\Omega)$ est solution de

$$\int_\Omega \sigma \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_D (1 - \sigma) \nabla h \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H^1_\diamond(\Omega). \quad (3)$$

Question 3. Montrer que les opérateurs H et L sont continus et que

$$(\Lambda - \Lambda_0)g = (L \circ H)g \quad \forall g \in L^2_\diamond(\partial\Omega)$$

On note par H^* l'adjoint de l'opérateur H , c'est-à-dire $H^* : H^1(D) \rightarrow L^2_\diamond(\partial\Omega)$ vérifiant

$$(Hg, v_0)_{H^1(D)} = (g, H^*v_0)_{L^2_\diamond(\partial\Omega)} \quad \forall g \in L^2_\diamond(\partial\Omega) \text{ et } v_0 \in H^1(D).$$

Question 4. Montrer que pour tout $v_0 \in H^1(D)$, $H^*v_0 = v|_{\partial\Omega}$ où $v \in H^1_\diamond(\Omega)$ est l'unique solution de

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx = (v_0, \varphi)_{H^1(D)} \quad \forall \varphi \in H^1_\diamond(\Omega). \quad (4)$$

On pose enfin $T : H^1(D) \rightarrow H^1(D)$ défini par

$$T(h) = v_0$$

où $v_0 \in H^1(D)$ la solution de

$$(v_0, \varphi)_{H^1(D)} = \int_D (1 - \sigma) \nabla (h + w(h)) \cdot \nabla \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(D)$$

et où $w(h) \in H^1_\diamond(\Omega)$ est l'unique solution de (3).

Question 5. Montrer que T est bien défini et que l'on a la factorisation :

$$\Lambda - \Lambda_0 = H^* \circ T \circ H.$$

Question 6. Montrer que $T^* = T$ et que

$$(T(h), h)_{H^1(D)} = \int_D (1 - \sigma) |\nabla h|^2 dx + \int_D \sigma |\nabla w(h)|^2 dx.$$

Question 7. En déduire que si $(1 - \sigma) \geq \gamma > 0$ alors il existe $\alpha > 0$ tq

$$(THg, Hg)_{H^1(D)} \geq \alpha \|Hg\|^2 \quad \forall g \in L^2_\diamond(\partial\Omega).$$

Indication : procéder par un raisonnement par contradiction (similaire à celui utilisé pour montrer l'inégalité de Poincaré).

Les résultats des questions 5 et 6 permettent de déduire (et c'est là que l'on va admettre ce passage) que l'image de $(\Lambda - \Lambda_0)^{1/2}$ coïncide avec l'image de l'opérateur H^* (La définition de la racine carrée d'un opérateur symétrique positif se fait de manière analogue pour les matrices – voir par exemple (6)). Par ailleurs il est possible de montrer que l'image de H^* caractérise D (noter que H^* est indépendant de σ). Pour simplifier nous allons supposer dans toute la suite que

$$\Omega = \text{cercle de centre } 0 \text{ et de rayon } R.$$

On pose pour ξ et x dans Ω et $x \neq \xi$

$$\Phi(x, \xi) := -\frac{1}{2\pi} \left(\log|x - \xi| + \log \left| \frac{R}{|x|} x - \frac{|x|}{R} \xi \right| \right) + \frac{\log R}{\pi},$$

une fonction qui peut être définie de manière équivalente comme la solution dans $L^2_\diamond(\Omega)$ de

$$\begin{cases} \Delta\Phi(\cdot, \xi) = -\delta_\xi \text{ in } \Omega \\ \partial_\nu\Phi(\xi, \cdot) = -1/|\partial\Omega| \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

(Vous pouvez réfléchir à comment rigoureusement définir au sens de la dérivation faible la solution de (5)). Pour un vecteur non nul p on définit alors le dipole (localisé en ξ et polarisé suivant p)

$$\psi(x, \xi, p) = p \cdot \nabla_\xi \Phi(x, \xi).$$

Vérifier que

$$\psi(x, \xi, p) = \frac{1}{\pi} \frac{p \cdot (\xi - x)}{|\xi - x|^2} \text{ pour } x \in \partial\Omega.$$

Question 8 (optionnelle). Montrer que si $\xi \in D$ alors $\psi(\cdot, \xi, p)|_{\partial\Omega}$ appartient à l'image de H^* . Indication : utiliser le fait que $\Delta\Phi(\cdot, \xi) = 0$ sur tout ouvert de Ω ne contenant pas ξ .

On admettra la partie complémentaire qui stipule que si $\xi \notin D$ alors $\psi(\cdot, \xi, p)|_{\partial\Omega}$ n'appartient pas à l'image de H^* .

On en déduit alors que $\psi(\cdot, \xi, p)|_{\partial\Omega}$ appartient à l'image de $(\Lambda - \Lambda_0)^{1/2}$ ssi $\xi \in D$. C'est cette caractérisation de D que nous allons utiliser pour construire une indicatrice du domaine D .

3 Partie numérique

Nous avons besoin en premier d'un code numérique qui pour une donnée g construit la solution $u \in H_\diamond^1(\Omega)$ de (1) qui s'écrit variationnellement

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} g \varphi \, ds \quad \forall \varphi \in H_\diamond^1(\Omega).$$

Le code FreeFem++ ne permet pas l'utilisation d'éléments finis conformes pour l'espace $H_\diamond^1(\Omega)$. C'est pour cela que nous allons remplacer u par $u_\epsilon \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \varphi \, dx + \epsilon \int_{\partial\Omega} u_\epsilon \cdot \varphi \, ds = \int_{\partial\Omega} g \varphi \, ds \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Nous rappelons que si $g \in L_\diamond^2(\Omega)$ alors $u_\epsilon \rightarrow u$ dans $H_\diamond^1(\Omega)$ (voir exercices des pc de MAP431, sinon le démontrer!).

Question 9. En s'inspirant de l'exemple dans la section 9.10 de la documentation de FreeFem++, écrire un programme qui calcule u_ϵ pour un g donné. Choisir $\sigma = 0.01$ dans D (carré de côté 1/2) légèrement décentré.

Pour construire une discrétisation de l'opérateur Λ nous allons projeter g et $u|_{\partial\Omega}$ sur les cos et sin. On note

$$e_{2n+1}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(n\theta) \text{ et } e_{2n}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(n\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

En approchant g et $u|_{\partial\Omega}$ respectivement par

$$g = \sum_{n=1}^{2N} g_n e_n \text{ et } u = \sum_{n=1}^{2N} u_n e_n$$

on pose comme discrétisation de Λ la matrice Λ_N (de taille $2N \times 2N$) définie par

$$\Lambda_N(g_1, \dots, g_{2N})^t = (u_1, \dots, u_{2N})^t.$$

Question 10. Donner l'expression de $\Lambda_{(i,j)}$ en fonction de u et écrire un programme FreeFem qui calcule Λ_N .

Question 11. Montrer que $\Lambda_{0(i,j)} = 0$ pour $i \neq j$ et $\Lambda_{0(2i,2i)} = \Lambda_{0(2i+1,2i+1)} = R/i$. Utiliser ce résultat pour valider le programme de calcul de Λ_N .

Question 12. Soit (v_i, λ_i) la décomposition en valeur propres de la matrice symétrique positive $\Lambda_N - \Lambda_{0N}$. La matrice $(\Lambda_N - \Lambda_{0N})^{1/2}$ est définie par

$$(\Lambda_N - \Lambda_{0N})^{1/2} v_i = \sqrt{\lambda_i} v_i. \tag{6}$$

Pour une polarisation p non nulle donnée, on pose $\psi(\cdot, \xi, p)|_{\partial\Omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(\xi, p)e_n$ et on définit

$$\psi_N(\xi, p) = (\psi^1(\xi, p), \dots, \psi^{2N}(\xi, p))^t.$$

Nous introduisons ensuite :

$$I_N(\xi, p) := \sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{\lambda_i} (\psi_N(\xi, p), v_i)^2.$$

Question 13. Justifier formellement (au vu des résultats de la partie théorique) pourquoi $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(\xi) < \infty$ ssi $\xi \in D$.

Ce résultat montre que

$$\chi(\xi, p) := \sum_{i=1}^{2N} (\psi_N(\xi, p), v_i)^2 / I_N(\xi)$$

se comporte comme une indicatrice du domaine D .

Question 14. Ecrire un programme matlab (ou scilab) qui calcule et trace cette fonction sur un quadrillage uniforme de la région contenant D . Pour augmenter le contraste on peut tracer $1/\log(\chi(\xi, p_1) + \chi(\xi, p_2))$ pour deux polarisations orthogonales p_1 et p_2 .

Question 15. Tester la robustesse de cette fonction par rapport à l'augmentation de N (on pourra faire varier N entre 10 et 50).

La dégradation du résultat par l'augmentation de N témoigne du caractère mal posé (instabilité) de l'application inverse : $\Lambda \mapsto D$. Le bon choix du paramètre N relève de la théorie de régularisation des problèmes (inverses) mal posés.