ÉCOLE POLYTECHNIQUE **Promotion 2001**

CONTRÔLE CLASSANT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
«Analyse numérique et optimisation»
Mardi 1^er Juillet 2003

Durée: 4 heures

Sujet proposé par Stéphane Gaubert et Claude Le Bris

Avertissement. *Les deux problèmes sont indépendants et doivent être rédigés sur des copies de couleur différente. À l'intérieur de chacun des problèmes, les sections (et souvent les questions) peuvent être abordées de manière indépendante. Le texte est long, mais plusieurs questions sont destinées à décomposer la difficulté et appellent des réponses simples.*

Problème I: Méthodes de pénalisation pour le problème de Stokes. (12 points)

L'objectif de ce problème est d'étudier plusieurs variantes de la méthode dite de pénalisation pour la résolution du problème de Stokes. Rappelons l'énoncé de ce problème : Ω désignant un ouvert borné, connexe de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ supposée de classe C^1, on cherche un champ de vitesse u et un champ de pression p, définis sur Ω et à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f, & \text{dans}\,\Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{dans}\,\Omega, \\ u = 0, & \text{sur}\,\Gamma \end{cases} \tag{I.1}$$

où f est un champ de forces donné. Par hypothèse dans tout ce problème, les trois composantes f_i, $i = 1,2,3$, de f sont des fonctions dans $L^2(\Omega)$, ce qu'on note $f \in (L^2(\Omega))^3$. On cherche une solution (u,p) dans $(H_0^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)$.

1. Méthode de pénalisation au niveau continu

Pour approcher le problème de Stokes, on considère $\varepsilon > 0$ et on introduit la fonctionnelle d'énergie suivante

$$J^\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega |\operatorname{div} v|^2 - \int_\Omega f\,.\,v, \tag{I.2}$$

définie sur $(H_0^1(\Omega))^3$. On rappelle la notation $\displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v = \sum_{i=1}^3 \int_\Omega \nabla u_i.\nabla v_i = \sum_{i=1}^3 \int_\Omega \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

Question 1.1. *Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, le problème de minimisation*

$$\inf_{v \in (H_0^1(\Omega))^3} J^\varepsilon(v) \tag{I.3}$$

admet un minimiseur unique, qu'on note désormais u^ε.

Question 1.2. *Ecrire l'équation d'optimalité vérifiée par u^ε sous la forme de la formulation variationnelle :*

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon,v) = L(v), \text{pour tout } v \in (H_0^1(\Omega))^3, \tag{I.4}$$

où a^ε est une forme bilinéaire et L est une forme linéaire. On explicitera a^ε et L.

Question 1.3. *Montrer, par une autre méthode que celle des Questions 1.1 et 1.2, que la formulation variationnelle (I.4) admet une solution unique.*

Question 1.4. *Déduire de (I.4) que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par* u^ε *est la suivante*

$$-\Delta u^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\nabla(\mathrm{div}(u^\varepsilon)) = f, \tag{I.5}$$

au sens faible dans Ω.

Question 1.5. *A quelle condition formelle (I.5) est-il équivalent à la première équation de (I.1)?*

Question 1.6. *En utilisant la formulation variationnelle (I.4) et l'inégalité de Poincaré, montrer les deux estimations suivantes*

$$\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq C_1 \int_\Omega |f|^2, \tag{I.6}$$

$$\int_\Omega |\,\mathrm{div}(u^\varepsilon)|^2 \leq C_2\,\varepsilon \int_\Omega |f|^2, \tag{I.7}$$

où les constantes C_1 *et* C_2 *ne dépendent pas de* ε*, mais seulement de l'ouvert* Ω.

On **admet** (conformément au cours écrit, Chapitre 6) que (u,p) solution au sens faible du problème de Stokes (I.1) dans $(H_0^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)$, existe, et est unique à l'ajout d'une constante près sur la pression p.

Question 1.7. *Montrer que la solution (faible) de (I.1) vérifie la formulation suivante*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,v &=& \displaystyle\int_\Omega f\,.\,v, \qquad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3, \\ \displaystyle\int_\Omega q\,\mathrm{div} u &=& 0, \qquad \forall q \in L^2(\Omega). \end{array}\right. \tag{I.8}$$

Question 1.8. *En utilisant (I.4) et (I.8), montrer d'abord que*

$$\|\,\mathrm{div}(u^\varepsilon - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon, \tag{I.9}$$

pour une constante C *indépendante de* ε*. Montrer qu'on améliore ainsi l'estimation (I.7). En déduire aussi que*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{(H_0^1(\Omega))^3} \text{ tend vers 0 quand } \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{I.10}$$

Quelle est votre conclusion?

2. Discrétisation de cette méthode par éléments finis

Pour toute la suite du problème, on suppose que l'ouvert Ω est un ouvert polyédrique, que l'on note Ω_h. On peut donc en réaliser un maillage.

Afin de résoudre numériquement le problème (I.4), on introduit un maillage $\mathcal{T}_h$ de Ω_h et l'approximation variationnelle interne P_k^3 $(k \geq 1)$ de l'espace $(H_0^1(\Omega_h))^3$ suivante :

$$V_{0h} = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}_h)^3 \text{ tel que } v|_{K_i} \in P_k^3, \text{pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_h\} \tag{I.11}$$

On désigne par ϕ_i, $1 \leq i \leq N$, les fonctions de base de ces éléments finis, de sorte que chaque fonction $v_h \in V_{0h}$ se décompose en $v_h(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^N (v_h)_i \phi_i(x)$. On discrétise le problème (I.4) de la façon suivante: on cherche $u_h^\varepsilon \in V_{0h}$ tel que

$$\int_{\Omega_h} \nabla u_h^\varepsilon(x).\nabla v_h(x)\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_h} \mathrm{div}\,u_h^\varepsilon(x)\,\mathrm{div}\,v_h(x)\,dx = \int_{\Omega_h} f(x)\,.\,v_h(x), \qquad \forall v_h \in V_{0h}. \tag{I.12}$$

Question 2.1. *Montrer que ce problème discrétisé (I.12) s'écrit comme la résolution du problème algébrique*

$$(A_h + \frac{1}{\varepsilon} C_h)\, U_h^\varepsilon = F_h, \tag{I.13}$$

où U_h^ε est le vecteur formé des inconnues $(u_h^\varepsilon)_i$ issues de la décomposition de u_h^ε dans la base des ϕ_i, $1 \leq i \leq N$. On précisera le terme général des matrices A_h et C_h (matrices carrées de taille $N \times N$), et le terme général du vecteur colonne (de taille N) F_h, en fonction des ϕ_i, $1 \leq i \leq N$, et de f.

Question 2.2. *Montrer qu'il existe une et une seule solution U_h^ε de (I.13).*

Pour appréhender la difficulté algébrique liée à la résolution du système linéaire (I.13), on va estimer le conditionnement de la matrice $A_h + \frac{1}{\epsilon} C_h$. Si B est une matrice symétrique, on note $\lambda_{\max}(B)$ (resp. $\lambda_{\min}(B)$) la plus grande (resp. plus petite) valeur propre de B, et on rappelle, d'après l'Annexe "Analyse numérique matricielle" du cours, que dans le cas particulier où B est positive, le conditionnement (pour la norme l^2) de B est le rapport $\lambda_{\max}(B)/\lambda_{\min}(B)$.

Question 2.3. *On prend A,C des matrices symétriques, non nécessairement positives. Montrer que*

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(C) \leq \lambda_{\max}(A+C) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(C)\ , \tag{I.14}$$

$$\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(C) \geq \lambda_{\min}(A+C) \geq \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(C)\ . \tag{I.15}$$

Question 2.4. *On prend A une matrice symétrique définie positive, et C une matrice symétrique positive, non-inversible, mais non-nulle. Déduire de la question précédente que le conditionnement de $A + \frac{1}{\epsilon} C$ est d'ordre $1/\epsilon$ lorsque $\epsilon \to 0$. Expliquer, sans calcul et formellement, pourquoi ceci permet d'anticiper des difficultés pour la résolution de (I.13).*

3. Méthode de pénalisation au niveau discret

On reprend ici l'ouvert polyédrique Ω_h, le maillage $\mathcal{T}_h$ et l'espace V_{0h} de discrétisation de la vitesse définis dans la section précédente. On introduit de même, pour la discrétisation de la pression, l'espace

$$Q_h = \{q \in \mathcal{C}(\bar\Omega_h) \text{ tel que } q|_{K_i} \in P_{k'}, \text{pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\}, \tag{I.16}$$

pour un entier k'. On désigne par ψ_i $1 \leq i \leq M$ la base d'éléments finis de cet espace, de sorte que chaque $q_h \in Q_h$ se décompose sous la forme $q_h(x) = \sum_{i=1}^{M} (q_h)_i \psi_i(x)$. On introduit alors la formulation variationnelle mixte discrète suivante, pour chaque $\varepsilon > 0$: *Trouver $(\tilde u_h^\varepsilon, \tilde p_h^\varepsilon) \in V_{0h} \times Q_h$ tels que*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \displaystyle\int_{\Omega_h} \nabla \tilde u_h^\varepsilon . \nabla v_h - \int_{\Omega_h} \tilde p_h^\varepsilon \operatorname{div} v_h & = & \displaystyle\int_{\Omega_h} f\,.\,v_h, & \forall v_h \in V_{0h}, \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} q_h \operatorname{div} \tilde u_h^\varepsilon + \varepsilon \int_{\Omega_h} q_h\, \tilde p_h^\varepsilon & = & 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{array} \right. \tag{I.17}$$

Question 3.1. *Pour $\varepsilon = 0$, de quelle formulation variationnelle (I.17) est-elle l'approximation discrète ?*

Question 3.2. *Montrer que (I.17) est équivalent au système linéaire*

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^* \\ B_h & -\varepsilon M_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde U_h^\varepsilon \\ \tilde P_h^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_h \\ 0 \end{pmatrix} \tag{I.18}$$

où $\tilde U_h^\varepsilon$ et $\tilde P_h^\varepsilon$ désignent les vecteurs colonnes formés respectivement des coefficients de $\tilde u_h^\varepsilon$ sur la base des ϕ_i et des coefficients de $\tilde p_h^\varepsilon$ sur la base des ψ_i. On exprimera les termes généraux des matrices A_h, B_h, B_h^* (transposée de la matrice B_h), M_h à partir des fonctions de base ϕ_i et ψ_i.

Question 3.3. *Pour $\varepsilon > 0$, montrer que le système (I.18) a une solution unique (on pourra pour cela "éliminer" la variable $\tilde P_h^\varepsilon$).*

Question 3.4. *En comparant, pour $\varepsilon > 0$, les systèmes (I.18) et (I.13) expliquer pourquoi on affirme que, en général,* la méthode de pénalisation ne commute pas avec la discrétisation.

4. Méthode de Lagrangien augmenté

Pour $\varepsilon = 0$ et en supposant résolues certaines difficultés liées à la non unicité de la pression, on peut montrer (mais le candidat ne cherchera pas à le faire ici) que le système (I.18) est le système algébrique d'inconnue $\begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix}$ suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \tag{I.19}$$

où A est une matrice symétrique de taille N, B est une matrice rectangulaire de taille $M \times N$, B^* sa matrice transposée, U et F deux vecteurs colonnes de taille N, P un vecteur colonne de taille M (on prendra garde au fait que cette taille M peut être différente de celle manipulée dans la section précédente). On suppose que la matrice A est définie positive et que la matrice B est de rang M.

Question 4.1. *Dans ces conditions, montrer que la solution de (I.19) est unique.*

On introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(V,Q) = \frac{1}{2}(AV,V)_N - (F,V)_M + (BV,Q)_N \tag{I.20}$$

défini pour $V \in \mathbb{R}^N$ et $Q \in \mathbb{R}^M$. Les notations $(\cdot,\cdot)_N$ et $(\cdot,\cdot)_M$ désignent les produits scalaires de $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^M$.

Question 4.2. *Rappeler pourquoi, d'après les propriétés de A et B et d'après le cours, le Lagrangien $\mathcal{L}$ admet un unique point selle sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, et pourquoi ce point selle est la solution de (I.19).*

On introduit alors, pour $r \geq 0$, le Lagrangien $\mathcal{L}_r$, dit Lagrangien augmenté, défini pour $V \in \mathbb{R}^N$ et $Q \in \mathbb{R}^M$ par

$$\mathcal{L}_r(V,Q) = \mathcal{L}(V,Q) + \frac{r}{2}(BV,BV)_N \tag{I.21}$$

Question 4.3. *Montrer que ce Lagrangien $\mathcal{L}_r$ a un unique point selle, et que ce point selle est exactement l'unique solution $\begin{pmatrix} U^r \\ P^r \end{pmatrix}$ du système*

$$\begin{pmatrix} (A + rB^*B) & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^r \\ P^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{I.22}$$

Montrer que $\begin{pmatrix} U^r \\ P^r \end{pmatrix}$ et la solution $\begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix}$ du système (I.19) sont identiques.

On applique à la résolution du système (I.22) l'algorithme de Uzawa, c'est-à-dire qu'on choisit (U_0,P_0) et on construit la suite (U_n,P_n) par

$$\begin{cases} (A + rB^*B)U_n = F - B^*P_n \\ P_{n+1} = P_n + \mu BU_n, \end{cases} \tag{I.23}$$

où μ est un coefficient réel fixé. L'objectif de la fin de cette section est de déterminer quand cet algorithme converge, et de choisir les valeurs des paramètres r et μ pour qu'il converge le plus vite possible.

Question 4.4. *Montrer que la matrice $A^{-1}B^*B$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.*

On note désormais λ_i, $1 \leq i \leq N_0$ (pour un certain $N_0 \leq N$) les valeurs propres **strictement positives** de $A^{-1}B^*B$, et e_i des vecteurs propres unitaires associés à ces valeurs propres. On note de plus $\Lambda = \max_{1 \leq i \leq N_0} \lambda_i$.

Question 4.5. *On pose $Z_n = A^{-1}B^*(P_n - P)$. Montrer que l'algorithme (I.23) impose*

$$Z_{n+1} = H\,Z_n, \tag{I.24}$$

où l'on calculera la matrice H en fonction de r, μ, A et B.

Question 4.6. *Montrer que Z_n est une combinaison linéaire des seuls e_i, $1 \leq i \leq N_0$, à savoir $Z_n = \sum_{i=1}^{N_0} (Z_n)_i \, e_i$. Montrer alors que*

$$(Z_{n+1})_i = \left(\frac{1-(\mu - r)\lambda_i}{1 + r\lambda_i}\right)(Z_n)_i, \ \forall \ 1 \leq i \leq N_0. \tag{I.25}$$

Question 4.7. *En déduire que (U_n,P_n) converge vers (U,P), quand $n \longrightarrow +\infty$, si et seulement si*

$$0 < \mu < 2\left(r + \frac{1}{\Lambda}\right),$$

et que cette convergence est alors géométrique, au sens où

$$\|U_n - U\|_N + \|P_n - P\|_M \leq C\,[\rho(\mu,r)]^n,$$

pour une certaine constante C et un taux de convergence $\rho(\mu,r)$ qu'on explicitera en fonction de r, μ et des λ_i, $1 \leq i \leq N$.

Question 4.8. *Montrer qu'en prenant $\mu = r$ et en choisissant r grand, on peut rendre $\rho(\mu,r)$ arbitrairement proche de zéro, et donc la convergence aussi rapide que voulue. Quel est le coût du calcul d'une itération? Quelle est la difficulté qui fait qu'en pratique on ne peut pas prendre r arbitrairement grand?*

Question 4.9. *Que se passe-t-il dans le cas où on utilise l'algorithme d'Uzawa directement sur le Lagrangien non augmenté $\mathcal{L}$, c'est-à-dire sur le système (I.19)? Commenter l'intérêt de la méthode du Lagrangien augmenté.*

Problème II: Réseaux électriques. (8 points)

Description du réseau et notations

On considère un *réseau électrique* dont les nœuds sont numérotés de 1 à N. On note

$$\mathsf{N} = \{1, \ldots, N\} \ .$$

Lorsque le nœud $i \in \mathsf{N}$ et le nœud $j \in \mathsf{N}$ sont reliés par un fil, on note

$$C_{ij} = C_{ji} > 0$$

la *conductance* du fil reliant i et j. On note aussi $R_{ij} = C_{ij}^{-1}$ la *résistance* de ce fil. On posera $C_{ij} = 0$ lorsque les nœuds i et j ne sont pas reliés par un fil. On note enfin

$$\mathsf{A} = \{(i,j) \in \mathsf{N}^2 \mid i < j, \ C_{ij} > 0\}$$

l'ensemble des fils du réseau.

Si E est un ensemble fini, on désigne par $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$ l'espace vectoriel des fonctions de E dans $\mathbb{R}$. On notera $(\cdot,\cdot)_{\mathsf{E}}$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{\mathsf{E}}$. Par commodité, si $v \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}}$, on notera v_i, au lieu de $v(i)$, la valeur de v en le nœud i, et si $x \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}}$, on notera x_{ij}, au lieu de $x((i,j))$, la valeur de x en le fil (i,j). Ainsi,

$$(v,w)_{\mathsf{N}} = \sum_{i \in \mathsf{N}} v_i w_i, \ \text{pour } v \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}}, \ \ w \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}} \ \ ,$$

$$(x,y)_{\mathsf{A}} = \sum_{(i,j)\in\mathsf{A}} x_{ij} y_{ij}, \ \text{pour } \ x \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}}, \ \ y \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}} \ \ .$$

Si M est un opérateur linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre, on notera M^* l'*adjoint* de M relativement aux produits scalaires canoniques sur les espaces considérés.

Étant donné $v \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}}$, on définit

$$\mathcal{P}(v) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in\mathsf{A}} C_{ij}(v_i - v_j)^2 \ \ ,$$

la *puissance dissipée par effet Joule* si l'on applique le potentiel v aux nœuds du réseaux.

On définit l'*opérateur gradient* du réseau comme l'opérateur linéaire $G : \mathbb{R}^{\mathsf{N}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{A}}$ tel que

$$(Gv)_{ij} = v_j - v_i \ \ , \forall v \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}} \ \ .$$

On dit que le réseau électrique est *connexe* si deux nœuds quelconques du réseau peuvent être reliés par une suite de fils: pour tous $i,j \in \mathsf{N}$, on peut trouver $i_0, \dots ,i_k \in \mathsf{N}$, tels que $i_0 = i$, $i_k = j$, et $C_{i_0 i_1} \cdots C_{i_{k-1} i_k} > 0$. *Dans toute la suite, on supposera que le réseau est connexe.*

1. Potentiel électrique de réseaux linéaires

Question 1.1. *Montrer que*

$$Gv = 0 \iff v \in \mathbb{R}1_{\mathsf{N}}$$

où $1_{\mathsf{N}} \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}}$ *désigne le vecteur dont toutes les coordonnées valent* 1.

On appelle *opérateur Laplacien* du réseau l'unique opérateur linéaire $L : \mathbb{R}^{\mathsf{N}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{N}}$, auto-adjoint ($L = L^*$), tel que:

$$\mathcal{P}(v) = \frac{1}{2}(-Lv,v)_{\mathsf{N}}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}} \quad .$$

Question 1.2. *Montrer que*

$$L = -G^* DG \quad ,$$

où D *désigne l'opérateur linéaire diagonal* $\mathbb{R}^{\mathsf{A}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{A}}$*, défini par:*

$$(Dx)_{ij} = C_{ij} x_{ij}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}} \quad .$$

Question 1.3. *Montrer que*

$$Lv = 0 \iff v \in \mathbb{R}1_{\mathsf{N}} \quad .$$

On se donne $b \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}}$, et l'on considère, pour $v \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}}$,

$$J(v) = \mathcal{P}(v) - (b,v)_{\mathsf{N}} \quad .$$

Question 1.4. *Montrer que* J *est convexe.*

Question 1.5. *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\quad v$ *est point de minimum de* J ,
(ii) $\quad -Lv = b$.

Question 1.6. *Montrer en utilisant la Question 1.3 que* J *admet un point de minimum si et seulement si* $(1_{\mathsf{N}},b)_{\mathsf{N}} = 0$*, et que ce point de minimum est unique à une constante additive près (ce qui signifie que si* u *et* v *sont deux points de minimum,* $u - v \in \mathbb{R}1_{\mathsf{N}}$*).*

2. Dualité potentiels-courants pour les réseaux non-linéaires

On se donne toujours $b \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}}$. On interprétera b_i comme un *courant externe* rentrant au nœud i. Nous appellerons *courant interne* au réseau un vecteur $x \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}}$ vérifiant la *loi des nœuds de Kirchoff*:

$$b_i + \sum_{j \in \mathsf{N} \text{ tel que } (j,i) \in \mathsf{A}} x_{ji} = \sum_{j \in \mathsf{N} \text{ tel que } (i,j) \in \mathsf{A}} x_{ij} \qquad \forall i \in \mathsf{N} \quad .$$

On notera $\mathcal{K}_b$ l'ensemble de ces courants.

Question 2.1. *Montrer que*

$$(G^* x)_i = \sum_{j \in \mathsf{N} \textit{ tel que } (j,i) \in \mathsf{A}} x_{ji} - \sum_{j \in \mathsf{N} \textit{ tel que } (i,j) \in \mathsf{A}} x_{ij} \quad .$$

Ainsi

$$\mathcal{K}_b = \{x \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}} \mid b = -G^* x\} \quad .$$

Question 2.2. *En déduire que*

$$\mathcal{K}_b \neq \emptyset \iff (1_{\mathsf{N}},b)_{\mathsf{N}} = 0$$

(on pourra utiliser la Question 1.6, ou bien raisonner directement).

On supposera désormais que le vecteur b vérifie $(1_{\mathsf{N}},b)_{\mathsf{N}} = 0$, et ainsi que $\mathcal{K}_b \neq \emptyset$. Nous considérons, pour $x \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}}$, une puissance électrique de la forme:

$$\mathcal{Q}_q(x) = \sum_{(i,j)\in\mathsf{A}} \frac{R_{ij}}{q}|x_{ij}|^q \quad ,$$

où $q \in [1,\infty[$ est fixé.

Question 2.3. *Montrer que le problème de minimisation*

$$\min_{x\in\mathcal{K}_b} \mathcal{Q}_q(x) \tag{II.1}$$

admet une solution.

Question 2.4. *Montrer que cette solution est unique si $q > 1$.*

Question 2.5. *Montrer que lorsque $q = 1$, le problème* (II.1) *peut se formuler comme un problème de programmation linéaire.*

On forme le Lagrangien

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^{\mathsf{A}} \times \mathbb{R}^{\mathsf{N}} \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}(x,v) = \mathcal{Q}_q(x) + (v,b+G^*x)_{\mathsf{N}} \ .$$

Question 2.6. *Montrer que $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}}$ est solution de* (II.1) *si et seulement si il existe $\bar{v} \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}}$ tel que la propriété de point selle suivante soit vérifiée:*

$$\mathcal{L}(\bar{x},v) \leq \mathcal{L}(\bar{x},\bar{v}) \leq \mathcal{L}(x,\bar{v}) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\mathsf{A}},\forall v \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}} \ .$$

Question 2.7. *On suppose maintenant que $q > 1$. Montrer à l'aide de la propriété de point-selle que*

$$\min_{x\in\mathcal{K}_b} \mathcal{Q}_q(x) = \max_{v\in\mathbb{R}^{\mathsf{N}}}((b,v)_{\mathsf{N}} - \mathcal{P}_p(v))$$

avec

$$\mathcal{P}_p(v) = \sum_{(i,j)\in\mathsf{A}} \frac{R_{ij}}{p}|\frac{v_i - v_j}{R_{ij}}|^p \quad , \tag{II.2}$$

p étant choisi tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

Que retrouve-t-on lorsque $q = 2$?

3. Analogue continu

On considère maintenant la discrétisation régulière de $[0,1]^2$, formée des points de coordonnées

$$(i_1h,i_2h), \ \text{où } i_1,i_2 \text{ sont des entiers tels que } 0 \leq i_1 \leq k, 0 \leq i_2 \leq k,$$

où k est un entier strictement positif, et $h = 1/k$. On considère le réseau électrique ayant pour ensemble de nœuds

$$\mathsf{N} = \{(i_1,i_2) \mid 0 \leq i_1 \leq k, 0 \leq i_2 \leq k\} \ ,$$

deux nœuds (i_1,i_2) et (j_1,j_2) étant reliés par un fil si, et seulement si, $|i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| = 1$, la résistance $R_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}$ valant alors h. Si v est une fonction continue sur $[0,1]^2$, on définit $v^h \in \mathbb{R}^{\mathsf{N}}$ par $v^h_{(i_1,i_2)} = v(i_1h,i_2h)$, pour $0 \leq i_1 \leq k$, $0 \leq i_2 \leq k$.

Pour $p \in [1,\infty[$, l'on note L^p l'ensemble des fonctions $u :]0,1[^2 \to \mathbb{R}$ telles que $|u|^p$ soit intégrable, et l'on pose, lorsque $u \in L^p$,

$$\|u\|_{L^p} = \Big(\int_{[0,1]^2} |u(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2\Big)^{1/p} \quad ,$$

et, lorsque $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ existent et appartiennent à L^p,

$$\|\nabla u\|_{L^p} = \Big(\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big\|^p_{L^p} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|^p_{L^p}\Big)^{1/p} \quad .$$

Question 3.1. *Montrer que si v est de classe C^1 sur $[0,1]^2$, et si $\mathcal{P}_p$ désigne la puissance électrique du réseau que l'on vient de définir, donnée par* (II.2) *avec $p \in [1,\infty[$, alors*

$$\lim_{h \to 0} h\mathcal{P}_p(v^h) = \frac{1}{p} \|\nabla v\|_{L^p}^p \ .$$

On note Γ le bord de $]0,1[^2$, et l'on se donne une fonction continue g définie sur Γ. On considère le problème d'optimisation

$$\inf_{\substack{u \in C^1([0,1]^2), \\ u = g \text{ sur } \Gamma}} \|\nabla u\|_{L^p} \ . \tag{II.3}$$

Question 3.2. *Montrer, lorsque $p \in]1,\infty[$, que si u est un point de minimum de* (II.3)*, alors, u est solution faible d'un problème aux limites*

$$A(u) = 0 \ \ \textit{dans }]0,1[^2, \quad u = g \ \textit{sur } \Gamma,$$

où A est un opérateur aux dérivées partielles du second ordre, non-linéaire, que l'on explicitera.