

École Polytechnique – Promotion 2011
Analyse numérique et optimisation (MAP431)
Contrôle classant – 03 juillet 2013 – durée 4 heures

sujet proposé par Alexandre Ern et Olivier Pantz

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants. Il comporte huit pages en tout. Chaque problème est à rédiger sur des copies de couleurs distinctes, rose pour le problème 1 et verte pour le problème 2. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.

Problème 1 (copies roses, 10 points) Vibrations d'un tambour non homogène

Partie A : Formulation du modèle

On considère un tambour dont la membrane occupe un ouvert borné régulier connexe Ω de \mathbb{R}^2 . Afin d'accorder le tambour, on propose d'appliquer un "patch" sur un ouvert régulier Ω_b de Ω . On note $\Omega_a = \Omega \setminus \overline{\Omega_b}$ la partie non modifiée du tambour.

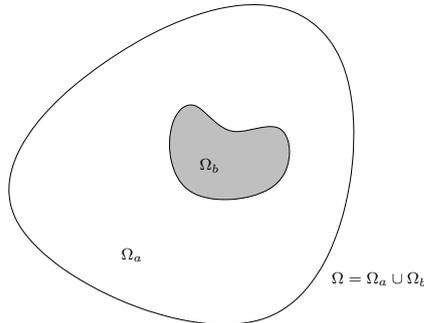


FIGURE 1 – Domaine Ω occupé par le tambour et patch Ω_b

L'application du patch a pour conséquence de modifier la densité de la membrane du tambour ainsi que sa rigidité. On note $\rho_a, \rho_b \in \mathbb{R}_*^+$ les densités respectives de Ω_a et Ω_b et $k_a, k_b \in \mathbb{R}_*^+$ leur rigidité. Par ailleurs, la membrane du tambour est supposée encastree sur son bord. On désigne par u le déplacement vertical de la membrane, solution de l'équation des ondes suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_a \frac{\partial^2 u|_{\Omega_a}}{\partial t^2} - k_a \Delta u|_{\Omega_a} = 0 & \text{dans } \Omega_a \times \mathbb{R}_*^+ \\ \rho_b \frac{\partial^2 u|_{\Omega_b}}{\partial t^2} - k_b \Delta u|_{\Omega_b} = 0 & \text{dans } \Omega_b \times \mathbb{R}_*^+ \\ u|_{\Omega_a} = u|_{\Omega_b} & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_*^+ \\ k_a \frac{\partial u|_{\Omega_a}}{\partial n} = k_b \frac{\partial u|_{\Omega_b}}{\partial n} & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(x, 0) = U_0(x) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = U_1(x) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

où $u|_{\Omega_a}$ et $u|_{\Omega_b}$ désignent respectivement la restriction de u à Ω_a et Ω_b , $\Gamma = \partial\Omega_a \cap \partial\Omega_b$ est l'interface entre les deux zones du tambour et n est la normale unité extérieure à Ω_b . De plus, on suppose que le déplacement initial U_0 appartient à $H_0^1(\Omega)$ et que la vitesse initiale U_1 appartient à $L^2(\Omega)$.

Pour toutes les questions (à l'exception de la première), on supposera que Ω_a et Ω_b sont de mesure non nulle.

1. On considère pour cette question le cas où Ω_b est vide (autrement dit, les densité et rigidité du tambour sont constantes égales à ρ_a et k_a). Déterminer la formulation variationnelle associée au problème (1) et montrer en appliquant un résultat du cours qu'elle admet une solution unique dans des espaces à préciser.
2. On considère dorénavant le cas où Ω_b est non vide et on définit les fonctions constantes par morceaux sur Ω suivantes

$$k(x) = \begin{cases} k_a & \text{si } x \in \Omega_a, \\ k_b & \text{si } x \in \Omega_b, \end{cases} \quad \rho(x) = \begin{cases} \rho_a & \text{si } x \in \Omega_a, \\ \rho_b & \text{si } x \in \Omega_b. \end{cases} \quad (2)$$

Déterminer la formulation variationnelle associée dans ce cas au problème (1) et montrer qu'elle admet une solution unique dans des espaces à préciser.

3. Les valeurs propres et modes propres $(\lambda_i, u_i)_{i \geq 1}$ du tambour sont les solutions du problème

$$\begin{cases} -k_a \Delta u_i|_{\Omega_a} = \lambda_i \rho_a u_i|_{\Omega_a} & \text{dans } \Omega_a \\ -k_b \Delta u_i|_{\Omega_b} = \lambda_i \rho_b u_i|_{\Omega_b} & \text{dans } \Omega_b \\ u_i|_{\Omega_a} = u_i|_{\Omega_b} & \text{sur } \Gamma \\ k_a \frac{\partial u_i|_{\Omega_a}}{\partial n} = k_b \frac{\partial u_i|_{\Omega_b}}{\partial n} & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

où $u_i|_{\Omega_a}$ et $u_i|_{\Omega_b}$ sont respectivement les restrictions de u_i à Ω_a et Ω_b . En appliquant un résultat du cours, montrer qu'il existe une famille modes et valeurs propres $(u_i, \lambda_i)_{i \geq 1}$ telle que $(u_i)_{i \geq 1}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ pour le produit scalaire

$$(u, v)_\rho = \int_{\Omega} \rho uv \, dx,$$

tandis que $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ est une suite croissante de réels positifs qui tend vers l'infini.

4. Exprimer la solution u de l'équation (1) en fonction de la décomposition des conditions initiales U_0 et U_1 sur la base de modes propres obtenue.
5. On souhaite déterminer l'influence de l'application du patch sur la note associée à la plus petite valeur propre du tambour, appelée note fondamentale. Dans la suite, on considère que les valeurs de k_a et ρ_a sont fixés et que k_b et ρ_b dépendent de paramètres de contraste r et s de sorte que

$$k_b = rk_a \text{ et } \rho_b = s\rho_a.$$

On notera $u_i(r, s)$ et $\lambda_i(r, s)$ les solutions de (3) associées à un contraste donné et on notera par ailleurs $k(r)$ et $\rho(s)$ la rigidité et la densité de la membrane, constantes par morceaux, données par (2).

- a) Quelle est l'influence du patch sur la note fondamentale si $s = 1$ et $r > 1$?
- b) Quelle est l'influence du patch sur la note fondamentale si $s > 1$ et $r = 1$?

Partie B : Patch de très forte rigidité

Dans les questions qui suivent, on va étudier l'influence d'un patch augmentant très fortement la rigidité de la membrane sans en modifier la densité.

6. Montrer que $\lambda_1(r, 1)$ est convergent lorsque $r \rightarrow \infty$. On notera λ^* sa limite.

7. Montrer qu'il existe une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ de réels strictement positifs tendant vers l'infini telle que $u_1(r_n, 1)$ soit convergente dans $L^2(\Omega)$. On notera u^* sa limite. Déterminer $\int_{\Omega} \rho_a |u^*|^2 dx$.

8. Montrer que pour tout r_m et r_p dans \mathbb{R}_*^+ , tels que $r_m \leq r_p$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k(r_m) \left| \frac{\nabla u_1(r_m, 1) - \nabla u_1(r_p, 1)}{2} \right|^2 dx \\ \leq \frac{\lambda_1(r_m, 1) + \lambda_1(r_p, 1)}{2} - \lambda_1(r_m, 1) \int_{\Omega} \rho_a \left| \frac{u_1(r_m, 1) + u_1(r_p, 1)}{2} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

On pourra à cet effet utiliser l'égalité de la médiane

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 = \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}.$$

9. Montrer que la suite $u_1(r_n, 1)$ est convergente dans $H_0^1(\Omega)$.

10. Montrer que $\nabla u^* = 0$ presque partout sur Ω_b .

11. En passant à la limite sur la formulation variationnelle vérifiée par $(u_1(r_n, 1), \lambda_1(r_n, 1))$, montrer que (u^*, λ^*) est solution d'un problème spectral à déterminer (Indication : on considérera des fonctions tests de gradient nul sur Ω_b).

Partie C : Patch de très grande densité

Dans les questions qui suivent, on va étudier l'influence d'un patch augmentant très fortement la densité de la membrane sans en modifier la rigidité.

12. Montrer que $s \mapsto s\lambda_1(1, s)$ est une fonction croissante de s . Montrer par ailleurs que $s\lambda_1(1, s)$ est majorée indépendamment de s pour tout $s > 1$. En déduire que $s\lambda_1(1, s)$ est convergente vers un réel strictement positif β lorsque $s \rightarrow +\infty$.

13. Montrer que $s^{1/2}u_1(1, s)$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$ indépendamment de $s > 1$.

14. Montrer que

$$\int_{\Omega_b} \rho_a |s^{1/2}u_1(1, s)|^2 dx \rightarrow 1 \text{ lorsque } s \rightarrow +\infty.$$

15. Montrer qu'il existe une suite de réels positifs $(s_n)_{n \geq 0}$ croissante et tendant vers l'infini tels que $s_n^{1/2}u_1(1, s_n)$ converge dans $L^2(\Omega)$. On notera w sa limite. Montrer de plus que

$$\int_{\Omega_b} \rho_a |w|^2 dx = 1.$$

16. Montrer que pour tous réels strictement positifs s_m et s_p , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k_a \left| \nabla \left(\frac{s_m^{1/2}u_1(1, s_m) - s_p^{1/2}u_1(1, s_p)}{2} \right) \right|^2 dx \\ \leq \frac{s_m\lambda_1(1, s_m) + s_p\lambda_1(1, s_p)}{2} - \gamma(s_m, s_p)s_m\lambda_1(1, s_m), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \gamma(s_m, s_p) = s_m^{-1} \int_{\Omega_a} \rho_a \left(\frac{s_m^{1/2}u_1(1, s_m) + s_p^{1/2}u_1(1, s_p)}{2} \right)^2 dx \\ + \int_{\Omega_b} \rho_a \left(\frac{s_m^{1/2}u_1(1, s_m) + s_p^{1/2}u_1(1, s_p)}{2} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

En déduire que la suite $s_n^{1/2}u_1(1, s_n)$ converge vers w dans $H^1(\Omega)$.

17. Montrer que w est non nul et que (w, β) est solution du problème spectral

$$\begin{cases} -k_a \Delta w = \beta \chi_b \rho_a w & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

où χ_b est la fonction caractéristique de Ω_b (i.e. égale à l'unité sur Ω_b et nulle sur son complémentaire).

Problème 2 (copies vertes, 10 points)

Un modèle (simplifié) de forces cohésives

Partie A : Étude du modèle continu

On considère un ouvert connexe, borné, régulier Ω de \mathbb{R}^2 . La frontière $\partial\Omega$ de Ω est partitionnée en deux sous-ensembles connexes $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_*$, tous deux de mesure (superficielle) non-nulle. On considère l'espace

$$V := \{v \in H^1(\Omega); v|_{\partial\Omega_D} = 0\}.$$

Muni de la norme $\|v\|_V := \{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2\}^{1/2}$, V est un espace de Hilbert. De plus, on dispose d'une inégalité de Poincaré sur V si bien qu'il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad C_\Omega \|v\|_V \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère la fonctionnelle $\mathcal{E} : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \mathcal{E}(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

où $\mu > 0$ est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer (en détaillant les éléments de la preuve) que la fonctionnelle \mathcal{E} est différentiable au sens de Fréchet en tout $v \in V$ et calculer sa dérivée en v dans la direction $w \in V$ (on utilisera la notation $\langle \mathcal{E}'(v), w \rangle_{V',V}$).
2. En utilisant la caractérisation (10.11) du polycopié, montrer que la fonctionnelle \mathcal{E} est fortement convexe sur V . En déduire que la fonctionnelle \mathcal{E} admet un unique minimiseur global sur V .

Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que ψ' est globalement Lipschitzienne sur \mathbb{R} (ce qui signifie qu'il existe une constante L telle que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $|\psi'(s) - \psi'(t)| \leq L|s - t|$). On définit la fonctionnelle $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \Psi(v) := \int_{\partial\Omega_*} \psi(\gamma_* v) ds,$$

où $\gamma_* : V \rightarrow L^2(\partial\Omega_*)$ est l'application trace sur $\partial\Omega_*$:

$$\forall v \in V, \quad \gamma_* v := v|_{\partial\Omega_*}.$$

Cette application est continue : il existe une constante C_{γ_*} telle que

$$\forall v \in V, \quad \|\gamma_* v\|_{L^2(\partial\Omega_*)} \leq C_{\gamma_*} \|v\|_V.$$

On admet que, pour tout $v \in V$, $\psi(\gamma_* v)$ est bien intégrable sur $\partial\Omega_*$, que $\psi'(\gamma_* v) \in L^2(\partial\Omega_*)$ et que la fonctionnelle Ψ est différentiable en tout $v \in V$ avec

$$\forall w \in V, \quad \langle \Psi'(v), w \rangle_{V',V} = \int_{\partial\Omega_*} \psi'(\gamma_* v) \gamma_* w ds.$$

On définit enfin la fonctionnelle $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall v \in V, \quad J(v) := \mathcal{E}(v) + \Psi(v).$$

Le lecteur curieux trouvera une motivation des bases physiques du modèle à la fin de l'énoncé.

3. Montrer que sous la condition

$$\mu C_{\Omega}^2 > LC_{\gamma_*}^2, \quad (5)$$

la fonctionnelle J est fortement convexe sur V et qu'elle admet un unique minimiseur global sur V (on le notera u). Écrire l'équation satisfaite par ce minimiseur pour toute fonction test $v \in V$.

4. Sous l'hypothèse $u \in H^2(\Omega)$, montrer que $-\mu\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$, puis, en admettant que les traces des fonctions de V sur $\partial\Omega_*$ engendrent un sous-espace dense dans $L^2(\partial\Omega_*)$, que $\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \psi'(\gamma_* u) = 0$ dans $L^2(\partial\Omega_*)$.

Partie B : Discrétisation

L'objectif est maintenant de formuler un problème de minimisation discret sur un sous-espace de dimension finie

$$V_h \subset V.$$

La construction de V_h repose sur la méthode des éléments finis. On suppose que Ω est un polygone de \mathbb{R}^2 et on considère un maillage triangulaire \mathcal{T}_h de Ω . On suppose que les arêtes de \mathcal{T}_h situées sur la frontière $\partial\Omega$ se trouvent soit sur $\partial\Omega_D$ soit sur $\partial\Omega_*$, et on note \mathcal{A}_h l'ensemble des arêtes qui se trouvent sur $\partial\Omega_*$. L'espace discret V_h est engendré par des fonctions continues, affines par morceaux sur \mathcal{T}_h et nulles sur $\partial\Omega_D$. Pour toute arête $a \in \mathcal{A}_h$, h_a désigne la longueur de a . De plus, pour tout $v_h \in V_h$, la fonction $\gamma_* v_h|_a$ est affine sur a ; sa valeur moyenne sur a est donnée par

$$\langle \gamma_* v_h \rangle_a := \frac{1}{h_a} \int_a \gamma_* v_h \, ds.$$

La fonctionnelle Ψ étant non-linéaire, on introduit en pratique une fonctionnelle approchée afin d'évaluer l'intégrale sur $\partial\Omega_*$. Partant de la formule des rectangles, on considère la fonctionnelle approchée Ψ_h définie par

$$\forall v_h \in V_h, \quad \Psi_h(v_h) := \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a \psi(\langle \gamma_* v_h \rangle_a),$$

et on pose

$$\forall v_h \in V_h, \quad J_h(v_h) := \mathcal{E}(v_h) + \Psi_h(v_h).$$

On admet que

$$\forall w_h \in V_h, \quad \langle \Psi'_h(v_h), w_h \rangle_{V'_h, V_h} = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a \psi'(\langle \gamma_* v_h \rangle_a) \langle \gamma_* w_h \rangle_a.$$

5. Montrer que

- pour tout $v_h \in V_h$, $\sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a |\langle \gamma_* v_h \rangle_a|^2 \leq \|\gamma_* v_h\|_{L^2(\partial\Omega_*)}^2$;
- sous la condition (5), la fonctionnelle J_h est fortement convexe sur V_h ;
- sous cette même condition, la fonctionnelle J_h admet un unique minimiseur global sur V_h (on le notera u_h). Écrire l'équation satisfaite par ce minimiseur pour toute fonction test $v_h \in V_h$.

6. L'objectif de cette question est d'estimer l'erreur d'approximation $\|u - u_h\|_V$. On suppose la condition (5) et on pose $\alpha := \mu C_{\Omega}^2 - LC_{\gamma_*}^2 > 0$.

a) Montrer que, pour tout $v_h \in V_h$, en posant $\delta_h := u_h - v_h$, on a

$$\alpha \|\delta_h\|_V^2 \leq \langle J'(u) - J'(v_h), \delta_h \rangle_{V'_h, V_h} + \langle J'(v_h) - J'_h(v_h), \delta_h \rangle_{V'_h, V_h}.$$

b) En déduire que, pour tout $v_h \in V_h$,

$$\alpha \|u_h - v_h\|_V \leq (\mu + LC_{\gamma_*}^2) \|u - v_h\|_V + LC_{\gamma_*} \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \int_a |\gamma_* v_h - \langle \gamma_* v_h \rangle_a|^2 ds \right\}^{1/2}.$$

c) On considère une suite $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de maillages réguliers de Ω . On suppose que $u \in H^2(\Omega)$ et on désigne par $r_h u$ l'interpolé de u dans V_h . On rappelle le résultat d'interpolation

$$\|u - r_h u\|_V \leq C_1 h \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

et on admet par ailleurs le résultat suivant :

$$\left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \int_a |\gamma_*(r_h u) - \langle \gamma_*(r_h u) \rangle_a|^2 ds \right\}^{1/2} \leq C_2 h \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

avec des constantes C_1 et C_2 indépendantes de h et de u . Établir l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_V \leq C_3 h \|u\|_{H^2(\Omega)},$$

en précisant la constante C_3 .

Partie C : Résolution numérique

Les équations obtenues à la question 5c sont *non-linéaires* en u_h . Afin de contourner cette difficulté, on utilise une **méthode de décomposition-coordination** dont le principe est d'introduire une inconnue auxiliaire pour la trace de u_h sur $\partial\Omega_*$. On choisit pour cette inconnue auxiliaire l'espace discret

$$M_h := \{\eta_h \in L^2(\partial\Omega_*); \eta_h|_a \text{ est constante sur toute arête } a \in \mathcal{A}_h\}.$$

On notera M la dimension de M_h ; celle-ci est égale au nombre d'arêtes dans \mathcal{A}_h . On supposera que la condition (5) est satisfaite.

7. On considère le problème de minimisation avec contraintes d'égalité

$$\inf_{(v_h, \eta_h) \in K} \mathcal{J}_h(v_h, \eta_h), \quad \mathcal{J}_h(v_h, \eta_h) := \mathcal{E}(v_h) + \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a \psi(\eta_a),$$

où $K := \{(v_h, \eta_h) \in V_h \times M_h; \langle \gamma_* v_h \rangle_a = \eta_a \text{ pour tout } a \in \mathcal{A}_h\}$ et avec la notation abrégée $\eta_a := \eta_h|_a$. Pour tout $a \in \mathcal{A}_h$, on introduit l'application $F_a : V_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (v_h, \eta_h) \in V_h \times M_h, \quad F_a(v_h, \eta_h) := \langle \gamma_* v_h \rangle_a - \eta_a.$$

a) Montrer que la fonctionnelle \mathcal{J}_h admet un unique minimiseur global dans K , celui-ci étant égal à (u_h, ξ_h) avec un $\xi_h \in M_h$ que l'on précisera.

b) Montrer que la famille $\{F'_a(u_h, \xi_h)\}_{a \in \mathcal{A}_h}$ est libre. (On pourra considérer une combinaison linéaire $\sum_{a \in \mathcal{A}_h} \omega_a F'_a(u_h, \xi_h)$ et faire agir cette combinaison sur des vecteurs $(v_h, \eta_h) \in V_h \times M_h$ bien choisis.)

c) Montrer qu'il existe une unique fonction $p_h \in M_h$ telle que, en notant $p_a := p_h|_a$,

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx + \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a \langle \gamma_* v_h \rangle_a p_a = \int_{\Omega} f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h, \quad (6a)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a (\psi'(\xi_a) - p_a) \eta_a = 0, \quad \forall \eta_h \in M_h. \quad (6b)$$

8. On pose $X_h := V_h \times M_h$ et on introduit le Lagrangien $\mathcal{L}_{r,h} : X_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tout $((v_h, \eta_h), q_h) \in X_h \times M_h$,

$$\mathcal{L}_{r,h}((v_h, \eta_h), q_h) = \mathcal{J}_h(v_h, \eta_h) + \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a q_a (\langle \gamma_* v_h \rangle_a - \eta_a) + \frac{r}{2} \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a |\langle \gamma_* v_h \rangle_a - \eta_a|^2,$$

où $r \geq 0$ est un paramètre réel (avec les notations $q_a := q_h|_a$ et $\eta_a := \eta_h|_a$). Lorsque $r = 0$, on retrouve le Lagrangien usuel associé à la minimisation de la fonctionnelle \mathcal{J}_h dans K ; lorsque $r > 0$, on appelle $\mathcal{L}_{r,h}$ un **Lagrangien augmenté**. L'approche par décomposition-coordination conduit à l'algorithme itératif suivant (inspiré de l'algorithme d'Uzawa) : étant donnés $\xi_h^0 \in M_h$ et $p_h^0 \in M_h$, résoudre pour tout $n \geq 0$,

$$\mathcal{L}_{r,h}((u_h^{n+1}, \xi_h^n), p_h^n) = \inf_{v_h \in V_h} \mathcal{L}_{r,h}((v_h, \xi_h^n), p_h^n), \quad (7a)$$

$$\mathcal{L}_{r,h}((u_h^{n+1}, \xi_h^{n+1}), p_h^n) = \inf_{\eta_h \in M_h} \mathcal{L}_{r,h}((u_h^{n+1}, \eta_h), p_h^n), \quad (7b)$$

$$p_a^{n+1} = p_a^n + \rho (\langle \gamma_* u_h^{n+1} \rangle_a - \xi_a^{n+1}), \quad \forall a \in \mathcal{A}_h, \quad (7c)$$

où $\rho > 0$ est un paramètre fixé. Noter que la minimisation de $\mathcal{L}_{r,h}$ se fait d'abord en v_h à $\eta_h = \xi_h^n$ fixé (étape (7a)) puis en η_h à $v_h = u_h^{n+1}$ fixé (étape (7b)).

- (a) Écrire l'équation satisfaite par u_h^{n+1} pour toute fonction test $v_h \in V_h$ (on posera $\xi_a^n := \xi_h^n|_a$ et $p_a^n := p_h^n|_a$). Montrer que la détermination de u_h^{n+1} revient à la résolution d'un système linéaire. On précisera le terme générique de la matrice et du second membre en utilisant les fonctions de base de l'espace discret V_h que l'on notera $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$. Vérifier que la matrice obtenue est symétrique définie positive.
- (b) Écrire l'équation satisfaite par ξ_h^{n+1} pour toute fonction test $\eta_h \in M_h$ (on posera $\xi_a^{n+1} := \xi_h^{n+1}|_a$ et $\eta_a := \eta_h|_a$). Montrer que la détermination de ξ_h^{n+1} revient à la résolution de M (la dimension de M_h) problèmes de minimisation unidimensionnels *découplés*. Montrer que sous la condition $r > L$, chacun de ces problèmes fait intervenir une fonctionnelle fortement convexe sur \mathbb{R} que l'on précisera.

Remarque sur la modélisation physique. Le minimiseur $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ décrit le déplacement vertical d'une membrane tendue, occupant initialement le domaine Ω , soumise à une densité surfacique d'efforts verticaux f et fixée sur le sous-ensemble $\partial\Omega_D$ de sa frontière. Enfin, un modèle (simplifié) de forces cohésives est appliqué sur le sous-ensemble $\partial\Omega_*$. Ces forces cohésives sont égales à $-\psi'(\gamma_* u)$. La figure ci-dessous illustre la forme typique des graphes des fonctions ψ et ψ' . Lorsque le déplacement de la membrane est petit sur $\partial\Omega_*$, les forces cohésives exercent une force de rappel sur le bord de la membrane et cette force de rappel augmente avec le déplacement. Lorsque le déplacement devient plus grand, les forces cohésives décroissent (perte de cohésion) et typiquement s'annulent pour de grands déplacements (où toute cohésion est perdue).

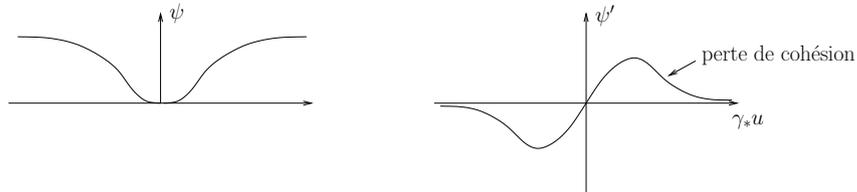


FIGURE 2 – Exemple de fonction ψ (à gauche) et de fonction ψ' (à droite)

Problème 1 : corrigé

Vibrations d'un tambour non homogène

Partie A : Formulation du modèle

1. Dans le cas $\Omega_b = \emptyset$, la formulation variationnelle associée consiste à déterminer $u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on ait pour tout $0 < t < T$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \rho_a u v \, dx + \int_{\Omega} k_a \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0,$$

avec $u(t=0) = U_0$ et $du/dt(t=0) = U_1$. Comme ρ_a et k_a sont strictement positifs,

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \rho_a u v \, dx$$

défini un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ et

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} k_a \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

est une forme bilinéaire continue et coercive (d'après l'inégalité de Poincaré) sur $H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème 8.3.1 d'existence du cours sur les équations d'évolution hyperboliques, il existe une solution unique.

2. La formulation variationnelle dans ce cas est identique, quitte à remplacer ρ_a par ρ et k_a par k . D'après le théorème 8.3.1 du cours, il existe à nouveau une solution unique appartenant à $u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$.
3. La formulation variationnelle associée au problème spectral consiste à déterminer les solutions $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ telles que pour toute fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, on ait

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_{\Omega} \rho u v \, dx.$$

D'après le théorème 7.3.2 du cours, il existe une base orthonormale de vecteurs propres de $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \rho u v \, dx.$$

4. On note U_0^i et U_1^i les coefficients de U_0 et de U_1 dans la base spectrale. On note de plus $\alpha_i(t)$ les coefficients de u dans la base spectrale, c'est à dire

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) u_i.$$

En injectant l'expression de u dans la formulation variationnelle, il vient pour tout $i > 0$,

$$\alpha_i''(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = 0,$$

avec $\alpha_i(0) = U_0^i$ et $\alpha_i'(0) = U_1^i$. On en déduit que

$$\alpha_i(t) = U_0^i \cos(\omega_i t) + U_1^i \sin(\omega_i t) / \omega_i,$$

avec $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$.

5. On a

$$\lambda_1(r, s) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega_a} k_a |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Omega_b} r k_a |\nabla v|^2 \, dx}{\int_{\Omega_a} \rho_a |v|^2 \, dx + \int_{\Omega_b} s \rho_a |v|^2 \, dx}$$

Le terme de droite étant croissant par rapport à r , une augmentation de la rigidité entraîne une augmentation de la plus petite valeur propre et produit un son plus aiguë. L'augmentation de la densité à un effet inverse et conduit donc à une note fondamentale plus grave.

Partie B : Patch de très forte rigidité

6. La fonction $r \mapsto \lambda_1(r, 1)$ est croissante. Par ailleurs,

$$\lambda_1(r, 1) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega_a} k_a |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega_b} r k_a |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} \rho_a |v|^2 dx} \leq \inf_{v \in W} \frac{\int_{\Omega_a} k_a |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} \rho_a |v|^2 dx}$$

où W est l'ensemble des éléments de $H_0^1(\Omega)$ tels que $\nabla v = 0$ sur Ω_b . Cet ensemble est non vide. On en déduit que $\lambda_1(r, 1)$ est majoré et croissant en r et donc convergent lorsque r tend vers l'infini vers une limite λ^* .

7. On a pour tout $r \geq 1$,

$$\int_{\Omega} k_a |\nabla u_1(r, 1)|^2 dx \leq \lambda^*.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, l'ensemble des éléments $u_1(r, 1)$ avec $r \geq 1$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. L'ouvert Ω étant borné et régulier, il existe, d'après le Théorème de Rellich une suite $u_1(r_n, 1)$ (avec $(r_n)_{n \geq 0}$ croissante, tendant vers l'infini) convergente vers un élément u^* dans $L^2(\Omega)$.

8. D'après l'égalité de la médiane, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k(r_m) \left| \frac{\nabla u_1(r_m, 1) - \nabla u_1(r_p, 1)}{2} \right|^2 dx = \\ \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} k(r_m) |\nabla u_1(r_m, 1)|^2 dx + \int_{\Omega} k(r_m) |\nabla u_1(r_p, 1)|^2 dx \right) \\ - \int_{\Omega} k(r_m) \left| \frac{\nabla u_1(r_m, 1) + \nabla u_1(r_p, 1)}{2} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

On a

$$\int_{\Omega} k(r_m) |\nabla u_1(r_m, 1)|^2 dx = \lambda_1(r_m, 1).$$

Comme $r_m \leq r_p$,

$$\int_{\Omega} k(r_m) |\nabla u_1(r_p, 1)|^2 dx \leq \int_{\Omega} k(r_p) |\nabla u_1(r_p, 1)|^2 dx = \lambda_1(r_p, 1),$$

et

$$\int_{\Omega} k(r_m) \left| \frac{\nabla u_1(r_m, 1) + \nabla u_1(r_p, 1)}{2} \right|^2 dx \geq \lambda_1(r_m, 1) \int_{\Omega} \rho_a \left| \frac{u_1(r_m, 1) + u_1(r_p, 1)}{2} \right|^2 dx.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k(r_m) \left| \frac{\nabla u_1(r_m, 1) - \nabla u_1(r_p, 1)}{2} \right|^2 dx \\ \leq \frac{\lambda_1(r_m, 1) + \lambda_1(r_p, 1)}{2} - \lambda_1(r_m, 1) \int_{\Omega} \rho_a \left| \frac{u_1(r_m, 1) + u_1(r_p, 1)}{2} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

9. D'après la convergence de $u_1(r_m, 1)$ et $u_1(r_p, 1)$ dans $L^2(\Omega)$ ainsi que la convergence de $\lambda_1(r_m, 1)$ et $\lambda_1(r_p, 1)$, on constate que le terme de droite de l'inégalité précédente converge vers zéro lorsque m et p tendent vers l'infini. Ainsi, la suite $u_1(r_n, 1)$ est de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$ donc convergente.

10. On a

$$\int_{\Omega_a} k_a |\nabla u_1(r_n, 1)|^2 dx + \int_{\Omega_b} k_a r_n |\nabla u_1(r_n, 1)|^2 dx \leq \lambda^*.$$

On en déduit que

$$\int_{\Omega_b} |\nabla u_1(r_n, 1)|^2 dx$$

tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Par ailleurs, comme $u_1(r_n, 1)$ converge vers u^* dans $H_0^1(\Omega)$, on a $\nabla u^* = 0$ presque partout sur Ω_b .

11. Tout d'abord, on a

$$u^* \in W := \{v \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \nabla v = 0 \text{ sur } \Omega_b\}.$$

En passant à la limite dans la formulation variationnelle, on obtient que pour tout $v \in W$,

$$\int_{\Omega_a} k_a \nabla u^* \cdot \nabla v dx = \lambda^* \int_{\Omega} \rho_a u^* v dx. \quad (8)$$

Partie C : Patch de très grande densité

12. On a, pour tout $v \in H_0^1(\Omega_b)$ prolongé par 0 sur Ω_a ,

$$\lambda_1(1, s) \leq \frac{\int_{\Omega} k_a |\nabla v|^2}{s \int_{\Omega_b} \rho_a |v|^2 dx}.$$

Ainsi, $s\lambda_1(1, s)$ est borné indépendamment de s .

On rappelle que

$$s\lambda_1(1, s) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} k_a |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega_a} s^{-1} \rho_a |v|^2 dx + \int_{\Omega_b} \rho_a |v|^2 dx}.$$

Le terme de droite étant croissant en fonction de s , on en déduit que l'application $s \mapsto s\lambda_1(1, s)$ est croissante. Étant par ailleurs majorée et strictement positive, elle admet une limite $\beta > 0$ lorsque s tend vers l'infini.

13. On a

$$\int_{\Omega} k_a |\nabla u_1(1, s)|^2 dx \leq \lambda_1(1, s).$$

Comme $s\lambda_1(1, s)$ est borné, on en déduit que $s^{1/2}u_1(1, s)$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$, d'après l'inégalité de Poincaré. Cela implique en particulier que $u_1(1, s)$ tend vers zéro dans H^1 .

14. On a

$$\int_{\Omega_a} \rho_a |u_1(1, s)|^2 dx + \int_{\Omega_b} \rho_a |s^{1/2}u_1(1, s)|^2 dx = 1.$$

Comme $u_1(1, s)$ converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que

$$\int_{\Omega_b} \rho_a |s^{1/2}u_1(1, s)|^2 dx \rightarrow 1$$

lorsque s tend vers l'infini.

15. Comme $s^{1/2}u_1(1, s)$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$ indépendamment de s , il existe une suite $(s_n)_{n \geq 0}$ croissante, tendant vers l'infini telle que $s_n^{1/2}u_1(1, s_n)$ soit convergente dans $L^2(\Omega)$ (d'après le Théorème de Rellich). On note w sa limite, et on a

$$\int_{\Omega_b} \rho_a |w|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_b} \rho_a |s_n^{1/2}u_1(1, s_n)|^2 dx = 1.$$

16. Il suffit d'utiliser l'égalité de la médiane. En effet, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k_a \left| \nabla \left(\frac{s_m^{1/2} u_1(1, s_m) - s_p^{1/2} u_1(1, s_p)}{2} \right) \right|^2 dx = \\ \frac{1}{2} \left(s_m \int_{\Omega} k_a |\nabla u_1(1, s_m)|^2 dx + s_p \int_{\Omega} k_a |\nabla u_1(1, s_p)|^2 dx \right) \\ - \int_{\Omega} k_a \left| \nabla \left(\frac{s_m^{1/2} u_1(1, s_m) + s_p^{1/2} u_1(1, s_p)}{2} \right) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

On a

$$\int_{\Omega} k_a |\nabla u_1(1, s_m)|^2 dx = \lambda_1(1, s_m),$$

$$\int_{\Omega} k_a |\nabla u_1(1, s_p)|^2 dx = \lambda_1(1, s_p),$$

et

$$\int_{\Omega} k_a \left| \nabla \left(\frac{s_m^{1/2} u_1(1, s_m) + s_p^{1/2} u_1(1, s_p)}{2} \right) \right|^2 dx \geq s_m \lambda_1(1, s_m) \gamma(s_m, s_p).$$

On en déduit l'inégalité demandée. De plus, on a $\gamma(s_m, s_p)$ qui converge vers $\int_{\Omega_b} \rho_a |w|^2 dx = 1$ lorsque m et p tendent vers l'infini. Ainsi, $s_n^{1/2} u_1(1, s_n)$ est une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$ et est donc convergente dans $H_0^1(\Omega)$ et par unicité de la limite dans $L^2(\Omega)$, celle-ci est la fonction w .

17. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} k_a \nabla u_1(1, s_n) \cdot \nabla v dx = \lambda_1(1, s_n) \left(\int_{\Omega_a} \rho_a u_1(1, s_n) v dx + s_n \int_{\Omega_b} \rho_a u_1(1, s_n) v dx \right).$$

Soit encore

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k_a \nabla s_n^{1/2} u_1(1, s_n) \cdot \nabla v dx = \\ s_n \lambda_1(1, s_n) \left(s_n^{-1/2} \int_{\Omega_a} \rho_a u_1(1, s_n) v dx + \int_{\Omega_b} \rho_a s_n^{1/2} u_1(1, s_n) v dx \right). \end{aligned}$$

En utilisant la convergence de $s_n^{1/2} u_1(1, s_n)$ vers w dans $H_0^1(\Omega)$, de $s_n \lambda_1(1, s_n)$ vers β et de $u_1(1, s_n)$ vers zéro dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que

$$\int_{\Omega} k_a \nabla w \cdot \nabla v dx = \beta \int_{\Omega_b} \rho_a w v dx.$$

Par ailleurs,

$$\int_{\Omega_b} \rho_a |w|^2 dx = 1.$$

Problème 2 : corrigé

Un modèle (simplifié) de forces cohésives

Partie A : Étude du modèle continu

1. On utilise la définition 10.1.1. Soit $v \in V$. Pour tout $w \in V$, un calcul direct donne

$$\mathcal{E}(v + w) = \mathcal{E}(v) + L(w) + R(w),$$

avec

$$L(w) = \int_{\Omega} \mu \nabla v \cdot \nabla w \, dx - \int_{\Omega} f w \, dx, \quad R(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu |\nabla w|^2 \, dx.$$

$L : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire *continue* car

$$|L(w)| \leq (\mu \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \|w\|_V,$$

et $R(w) = o(w)$ car $|R(w)| \leq \frac{1}{2} \mu \|w\|_V^2$. Par suite, \mathcal{E} est différentiable en $v \in V$ et on a

$$\langle \mathcal{E}'(v), w \rangle_{V',V} = \int_{\Omega} \mu \nabla v \cdot \nabla w \, dx - \int_{\Omega} f w \, dx.$$

2. On utilise la proposition 10.1.15, formule (10.11). Pour tout $(v, w) \in V \times V$, il vient

$$\langle \mathcal{E}'(v) - \mathcal{E}'(w), v - w \rangle_{V',V} = \int_{\Omega} \mu |\nabla(v - w)|^2 \, dx \geq \mu C_{\Omega}^2 \|v - w\|_V^2.$$

La fonctionnelle \mathcal{E} est donc fortement convexe sur V de paramètre $\alpha = \mu C_{\Omega}^2$. Enfin, comme la différentiabilité implique la continuité, l'existence et unicité du minimiseur global de \mathcal{E} sur V est fournie par le théorème 9.2.6 (appliqué avec $K = V$ qui est un espace de Hilbert d'après l'énoncé).

3. Pour tout $(v, w) \in V \times V$, il vient comme ψ' est globalement Lipschitzienne et γ_* linéaire continue,

$$\begin{aligned} \langle J'(v) - J'(w), v - w \rangle_{V',V} &= \int_{\Omega} \mu |\nabla(v - w)|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega_*} (\psi'(\gamma_* v) - \psi'(\gamma_* w)) \gamma_*(v - w) \, ds \\ &\geq \mu C_{\Omega}^2 \|v - w\|_V^2 - L \int_{\partial\Omega_*} |\gamma_*(v - w)|^2 \, ds \\ &= \mu C_{\Omega}^2 \|v - w\|_V^2 - L \|\gamma_*(v - w)\|_{L^2(\partial\Omega_*)}^2 \\ &\geq (\mu C_{\Omega}^2 - LC_{\gamma_*}^2) \|v - w\|_V^2, \end{aligned}$$

d'où la forte convexité de J sous la condition (5) avec paramètre $\alpha = \mu C_{\Omega}^2 - LC_{\gamma_*}^2$. L'existence et unicité du minimiseur global de J sur V est à nouveau fournie par le théorème 9.2.6. Enfin, en appliquant la remarque 10.2.2 au minimiseur global de J sur V , la condition d'Euler s'écrit $J'(u) = 0$ dans V' , c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega_*} \psi'(\gamma_* u) \gamma_* v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in V.$$

4. En prenant v arbitraire dans $C_c^{\infty}(\Omega)$ dans la condition d'Euler, on déduit que $-\mu \Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$. Puis, en appliquant la formule de Green, il vient (puisque v est nulle sur $\partial\Omega_D$)

$$\int_{\partial\Omega_*} \left\{ \mu \frac{\partial u}{\partial n} + \psi'(\gamma_* u) \right\} \gamma_* v \, ds = 0, \quad \forall v \in V.$$

La fonction $\frac{\partial u}{\partial n}$ étant dans $L^2(\partial\Omega_*)$ car $u \in H^2(\Omega)$ et comme $\psi'(\gamma_* u) \in L^2(\partial\Omega_*)$, le résultat de densité qu'on a admis permet de conclure que $\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \psi'(\gamma_* u) = 0$ dans $L^2(\partial\Omega_*)$.

Remarque. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\psi(t) = \psi(0) + t\psi'(0) + \int_0^t (\psi'(s) - \psi'(0)) ds$ et $\psi'(t) = \psi'(0) + (\psi'(t) - \psi'(0))$, si bien que

$$|\psi(t)| \leq |\psi(0)| + t|\psi'(0)| + \frac{1}{2}t^2L, \quad |\psi'(t)| \leq |\psi'(0)| + tL.$$

En appliquant ces inégalités avec $t = \gamma_*v(x)$ pour presque tout $x \in \partial\Omega_*$, en intégrant sur $\partial\Omega_*$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on déduit que

$$\begin{aligned} \|\psi(\gamma_*v)\|_{L^1(\partial\Omega_*)} &\leq |\psi(0)||\partial\Omega_*| + |\psi'(0)||\partial\Omega_*|^{1/2}\|\gamma_*v\|_{L^2(\partial\Omega_*)} + \frac{1}{2}L\|\gamma_*v\|_{L^2(\partial\Omega_*)}^2, \\ \|\psi'(\gamma_*v)\|_{L^2(\partial\Omega_*)} &\leq \left\{ 2|\psi'(0)|^2|\partial\Omega_*| + 2L^2\|\gamma_*v\|_{L^2(\partial\Omega_*)}^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

où $|\partial\Omega_*|$ désigne la mesure (superficielle) de $\partial\Omega_*$, ce qui montre que $\psi(\gamma_*v) \in L^1(\partial\Omega_*)$ et $\psi'(\gamma_*v) \in L^2(\partial\Omega_*)$. Comme $\psi'(\gamma_*v) \in L^2(\partial\Omega_*)$, l'application linéaire $w \mapsto \int_{\partial\Omega_*} \psi'(\gamma_*v)\gamma_*w ds$ est continue sur V . Enfin, comme

$$\Psi(v+w) - \Psi(v) - \int_{\partial\Omega_*} \psi'(\gamma_*v)\gamma_*w ds = \int_{\partial\Omega_*} \left(\int_0^1 (\psi'(\gamma_*v + t\gamma_*w) - \psi'(\gamma_*v)) dt \right) \gamma_*w ds,$$

on conclut quant à la différentiabilité de la fonctionnelle Ψ en majorant le membre de droite par $\frac{1}{2}LC_{\gamma_*}^2\|w\|_V^2$.

Partie B : Discrétisation

5. Étude de la fonctionnelle discrète J_h .

a) De par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, il vient, pour tout $a \in \mathcal{A}_h$,

$$|\langle \gamma_*v_h \rangle_a|^2 = h_a^{-2} \left(\int_a \gamma_*v_h ds \right)^2 \leq h_a^{-2} \left(\int_a ds \right) \left(\int_a |\gamma_*v_h|^2 ds \right) = h_a^{-1} \|\gamma_*v_h\|_{L^2(a)}^2,$$

d'où la majoration demandée en sommant sur $a \in \mathcal{A}_h$.

b) Pour tout $(v_h, w_h) \in V_h \times V_h$, il vient

$$\begin{aligned} \langle J'_h(v_h) - J'_h(w_h), v_h - w_h \rangle_{V'_h, V_h} &= \int_{\Omega} \mu |\nabla(v_h - w_h)|^2 dx \\ &\quad + \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a (\psi'(\langle \gamma_*v_h \rangle_a) - \psi'(\langle \gamma_*w_h \rangle_a)) \langle \gamma_*(v_h - w_h) \rangle_a \\ &\geq \mu C_{\Omega}^2 \|v_h - w_h\|_V^2 - L \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a |\langle \gamma_*(v_h - w_h) \rangle_a|^2 \\ &\geq \mu C_{\Omega}^2 \|v_h - w_h\|_V^2 - L \|\gamma_*(v_h - w_h)\|_{L^2(\partial\Omega_*)}^2 \\ &\geq (\mu C_{\Omega}^2 - LC_{\gamma_*}^2) \|v_h - w_h\|_V^2, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que ψ' est Lipschitzienne, γ_* linéaire continue et la question précédente appliquée à la fonction $(v_h - w_h)$. D'où la forte convexité de J_h sur V_h .

c) L'existence et unicité du minimiseur global de J_h sur V_h résulte toujours du théorème 9.2.6 (on peut aussi appliquer le théorème 9.1.3 en dimension finie avec $K = V_h$, J_h est continue car différentiable et tend vers l'infini à l'infini car fortement convexe de par la proposition 9.2.5). Le minimiseur $u_h \in V_h$ satisfait l'équation d'Euler dans V'_h , c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx + \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a \psi'(\langle \gamma_*u_h \rangle_a) \langle \gamma_*v_h \rangle_a = \int_{\Omega} f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h.$$

6. Estimation d'erreur.

- a) En utilisant la forte convexité de J_h sur V_h avec le paramètre α , le fait que $J'_h(u_h) = 0$ dans V'_h , que $J'(u) = 0$ dans V' et que $V_h \subset V$, il vient

$$\begin{aligned} \alpha \|\delta_h\|_V^2 &\leq \langle J'_h(u_h) - J'_h(v_h), \delta_h \rangle_{V'_h, V_h} \\ &= -\langle J'_h(v_h), \delta_h \rangle_{V'_h, V_h} \\ &= -\langle J'(v_h), \delta_h \rangle_{V'_h, V_h} + \langle J'(v_h) - J'_h(v_h), \delta_h \rangle_{V'_h, V_h} \\ &= \langle J'(u) - J'(v_h), \delta_h \rangle_{V'_h, V_h} + \langle J'(v_h) - J'_h(v_h), \delta_h \rangle_{V'_h, V_h}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- b) On désigne par T_1 et T_2 les deux termes du membre de droite de la majoration ci-dessus. On a

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{\Omega} \mu \nabla(u - v_h) \cdot \nabla \delta_h \, dx + \int_{\partial\Omega_*} (\psi'(\gamma_* u) - \psi'(\gamma_* v_h)) (\gamma_* u - \gamma_* v_h) \, ds \\ &\leq (\mu + LC_{\gamma_*}^2) \|u - v_h\|_V \|\delta_h\|_V. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$T_2 = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \int_a (\psi'(\gamma_* v_h) - \psi'(\langle \gamma_* v_h \rangle_a)) \gamma_* \delta_h \, ds,$$

car $\int_a \psi'(\langle \gamma_* v_h \rangle_a) \gamma_* \delta_h \, ds = h_a \psi'(\langle \gamma_* v_h \rangle_a) \langle \gamma_* \delta_h \rangle_a$. D'où

$$T_2 \leq LC_{\gamma_*} \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \int_a |\gamma_* v_h - \langle \gamma_* v_h \rangle_a|^2 \, ds \right\}^{1/2} \|\delta_h\|_V.$$

En simplifiant par $\|\delta_h\|_V$, on obtient l'inégalité demandée.

- c) On choisit $v_h := r_h u$ et on utilise les propriétés d'interpolation de r_h pour obtenir

$$\alpha \|u_h - r_h u\|_V \leq \{(\mu + LC_{\gamma_*}^2)C_1 + LC_{\gamma_*}C_2\} h \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et à nouveau l'estimation sur $\|u - r_h u\|_V$, on obtient l'estimation d'erreur avec $C_3 = C_1 + \alpha^{-1}((\mu + LC_{\gamma_*}^2)C_1 + LC_{\gamma_*}C_2)$.

Remarque. Pour montrer le résultat d'interpolation qui a été admis, on procède comme suit. En notant Π_* la projection L^2 -orthogonale sur M_h (qui revient à prendre les moyennes sur chaque arête de \mathcal{A}_h), il s'agit d'estimer $\|r_h u - \Pi_*(r_h u)\|_{L^2(\partial\Omega_*)}$. De par l'inégalité triangulaire,

$$\|r_h u - \Pi_*(r_h u)\|_{L^2(\partial\Omega_*)} \leq \|r_h u - u\|_{L^2(\partial\Omega_*)} + \|u - \Pi_*(u)\|_{L^2(\partial\Omega_*)} + \|\Pi_*(u - r_h u)\|_{L^2(\partial\Omega_*)}.$$

Le troisième terme du membre de droite est inférieur au premier, et celui-ci est majoré par $C_2' h^{3/2} \|u\|_{H^2(\Omega)}$. Le deuxième terme est majoré par $C_2'' h \|u\|_{H^1(\partial\Omega_*)}$ et la norme $\|u\|_{H^1(\partial\Omega_*)}$ est contrôlée par $\|u\|_{H^2(\Omega)}$.

Partie C : Résolution numérique

7. Méthode de décomposition-coordination.

- a) Soit u_h le minimiseur global de J_h sur V_h . On définit $\xi_h \in M_h$ en posant, pour tout $a \in \mathcal{A}_h$, $\xi_a := \xi_h|_a = \langle \gamma_* u_h \rangle_a$. On constate que $(u_h, \xi_h) \in K$. De plus, pour tout $(v_h, \eta_h) \in K$,

$$\mathcal{J}_h(u_h, \xi_h) = J_h(u_h) \leq J_h(v_h) = \mathcal{J}_h(v_h, \eta_h),$$

ce qui montre que (u_h, ξ_h) est minimiseur global de \mathcal{J}_h dans K . Réciproquement, si (v_h, η_h) est minimiseur global de \mathcal{J}_h dans K , il vient

$$J_h(v_h) = \mathcal{J}_h(v_h, \eta_h) \leq \mathcal{J}_h(u_h, \xi_h) = J_h(u_h),$$

si bien que $v_h = u_h$ car u_h est le minimiseur global de J_h dans V_h .

b) Pour tout $(v_h, \eta_h) \in V_h \times M_h$, il vient

$$\langle F'_a(u_h, \xi_h), (v_h, \eta_h) \rangle_{(V_h \times M_h)', V_h \times M_h} = \langle \gamma_* v_h \rangle_a - \eta_a.$$

Par conséquent, si la combinaison linéaire $\sum_{a \in \mathcal{A}_h} \omega_a F'_a(u_h, \xi_h)$ est nulle (dans $(V_h \times M_h)'$), en la faisant agir sur $(v_h, \eta_h) = (0, \chi_a)$ où χ_a est la fonction indicatrice de l'arête $a \in \mathcal{A}_h$, il vient $\omega_a = 0$. L'arête $a \in \mathcal{A}_h$ étant arbitraire, on en déduit la liberté de la famille $(F'_a(u_h, \xi_h))_{a \in \mathcal{A}_h}$.

c) Comme la famille $(F'_a(u_h, \xi_h))_{a \in \mathcal{A}_h}$ est libre, on peut appliquer le théorème 10.2.8 au couple (u_h, ξ_h) qui est minimiseur (global) de \mathcal{J}_h sur K : il existe M réels $(\lambda_a)_{a \in \mathcal{A}_h}$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$\mathcal{J}'_h(u_h, \xi_h) + \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \lambda_a F'_a(u_h, \xi_h) = 0 \quad (\in (V_h \times M_h)').$$

En testant successivement avec $(v_h, 0)$ pour tout $v_h \in V_h$ puis avec $(0, \eta_h)$ pour tout $\eta_h \in M_h$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx + \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \lambda_a \langle \gamma_* v_h \rangle_a &= \int_{\Omega} f v_h \, dx, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a \psi'(\xi_a) \eta_a - \lambda_a \eta_a &= 0, \quad \forall \eta_h \in M_h. \end{aligned}$$

D'où les équations (6a)-(6b) en définissant $p_h \in M_h$ par $p_a := p_h|_a = h_a^{-1} \lambda_a$. La liberté de la famille $(F'_a(u_h, \xi_h))_{a \in \mathcal{A}_h}$ implique l'unicité des multiplicateurs de Lagrange ; il en est donc de même de la fonction $p_h \in M_h$.

8. Algorithme itératif.

a) En différenciant le Lagrangien par rapport à son premier argument, on obtient, pour tout $v_h \in V_h$,

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u_h^{n+1} \cdot \nabla v_h \, dx + \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a p_a^n \langle \gamma_* v_h \rangle_a + r \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a (\langle \gamma_* u_h^{n+1} \rangle_a - \xi_a^n) \langle \gamma_* v_h \rangle_a = \int_{\Omega} f v_h \, dx.$$

On décompose u_h^{n+1} sous la forme $u_h^{n+1} = \sum_{i=1}^N U_i^{n+1} \varphi_i$. On introduit le vecteur $U^{n+1} \in \mathbb{R}^N$ de composantes U_i^{n+1} , ainsi que la matrice $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ et le vecteur $B^n \in \mathbb{R}^N$ avec, pour tout $1 \leq i, j \leq N$,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega} \mu \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx + r \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a \langle \gamma_* \varphi_i \rangle_a \langle \gamma_* \varphi_j \rangle_a, \\ B_i^n &= \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx + \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a (r \xi_a^n - p_a^n) \langle \gamma_* \varphi_i \rangle_a. \end{aligned}$$

On obtient le système linéaire

$$AU^{n+1} = B^n.$$

La matrice A est symétrique. Elle est définie positive car, pour tout $X \in \mathbb{R}^N$, en posant $x_h = \sum_{i=1}^N X_i \varphi_i$, il vient

$$\sum_{i,j=1}^N A_{ij} X_i X_j = \int_{\Omega} \mu |\nabla x_h|^2 \, dx + r \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a |\langle \gamma_* x_h \rangle_a|^2 \geq \mu C_{\Omega}^2 \|x_h\|_V^2.$$

b) En différentiant le Lagrangien par rapport à son deuxième argument, on obtient, pour tout $\eta_h \in M_h$,

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a \psi'(\xi_a^{n+1}) \eta_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a p_a^n \eta_a - r \sum_{a \in \mathcal{A}_h} h_a (\langle \gamma_* u_h^{n+1} \rangle_a - \xi_a^{n+1}) \eta_a = 0.$$

Pour tout $a \in \mathcal{A}_h$, en choisissant $\eta_h = \chi_a$, la fonction indicatrice de l'arête a , il vient

$$\psi'(\xi_a^{n+1}) + r \xi_a^{n+1} = p_a^n + r \langle \gamma_* u_h^{n+1} \rangle_a.$$

On introduit la fonction $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g_a(t) = \psi(t) + \frac{r}{2} t^2 - (p_a^n + r \langle \gamma_* u_h^{n+1} \rangle_a) t.$$

On constate d'une part que ξ_a^{n+1} est cherché comme annulant la dérivée g'_a et d'autre part, que pour tout $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$(g'_a(s) - g'_a(t))(s - t) = (\psi'(s) - \psi'(t))(s - t) + r(s - t)^2 \geq (r - L)(s - t)^2,$$

d'où la forte convexité de g_a sur \mathbb{R} sous la condition $r > L$. On en déduit que ξ_a^{n+1} existe et est unique.