

CONTRÔLE CLASSANT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

«Analyse numérique et optimisation»

Mardi 29 Juin 2004

Durée : 4 heures

Sujet proposé par Stéphane Gaubert et Yvon Maday

Avertissement. Les deux problèmes sont indépendants et doivent être rédigés sur des copies de couleur différente. À l'intérieur de chacun des problèmes, les sections (et souvent les questions) peuvent être abordées de manière indépendante.

Problème I: Méthode de synthèse modale avec recouvrement. (12 points)

Le but de ce problème est de proposer et d'analyser une méthode (qui se révèle très précise) pour le calcul de solutions de problèmes aux valeurs propres basée sur une décomposition de domaine et un calcul préalable de solutions de tels problèmes sur chacun des sous domaines.

PARTIE A : UNE APPROXIMATION ABSTRAITE

On s'intéresse au problème aux valeurs propres : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$-\Delta u = \lambda u,$$

où Ω est un ouvert borné assez régulier de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$.

Question 1. Mettre ce problème sous forme variationnelle équivalente : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \lambda m(u, v).$$

On précisera les formes a et m .

Question 2. On rappelle qu'il existe une suite croissante de valeurs propres positives λ_i auxquelles est associé un système total de vecteurs propres orthonormés dans $L^2(\Omega)$, on a donc

$$-\Delta u_i = \lambda_i u_i \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} u_i u_j = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = +\infty.$$

On suppose le domaine Ω régulier. Justifier que les solutions propres sont aussi régulières, préciser cette régularité. Noter bien (on ne demande pas de le justifier) que si le domaine possède des coins, les solutions propres peuvent, comme pour le problème de Laplace avec un second membre, présenter des singularités aux coins du domaine. En dehors de ces coins, la solution est par contre de classe C^∞ .

Question 3. Exhiber les valeurs propres et les fonctions propres correspondantes, notées ϕ_i , en dimension 1 sur l'intervalle $]0, 1[$. Exhiber les valeurs propres en dimension 2 sur le carré $]0, 1[^2$. On montrera pour cela que les fonctions $\phi_i(x)\phi_j(y)$ sont vecteurs propres, et l'on admettra que ces fonctions forment une base Hilbertienne de $L^2(]0, 1[^2)$.

Question 4. Rappeler la relation entre la première valeur propre et le quotient de Rayleigh : $\frac{a(v, v)}{m(v, v)}$.

Question 5. Soit X_δ un sous espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$. On propose l'approximation variationnelle suivante : trouver $u_\delta \in X_\delta$ et $\lambda_\delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall v_\delta \in X_\delta, \quad a(u_\delta, v_\delta) = \lambda_\delta m(u_\delta, v_\delta).$$

Montrer qu'il existe un ensemble fini de valeurs propres $\lambda_{i, \delta}$ associées à ce problème, et qu'elles sont strictement positives. On les range par ordre croissant, et on leur associe des vecteurs propres $u_{i, \delta}$ que l'on montrera pouvoir être choisis orthonormés dans $L^2(\Omega)$. Donner le nombre de valeurs propres, comptées avec leur multiplicité.

Question 6. En utilisant à nouveau le quotient de Rayleigh, déduire que $\lambda_1 \leq \lambda_{1,\delta}$.

Question 7. Soit v_δ un élément de X_δ , de norme 1 dans $L^2(\Omega)$. Montrer que

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) = a(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1) + 2a(u_1, v_\delta - u_1)$$

puis que

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) = a(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1) - \lambda_1 m(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1)$$

En choisissant bien v_δ , en déduire que

$$|\lambda_1 - \lambda_{1,\delta}| \leq c \inf_{w_\delta \in X_\delta} \|u_1 - w_\delta\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Noter que ici, et dans la suite, c dénote une constante quelconque et > 0 qui pourra varier d'une inégalité à l'autre mais est toujours indépendante de δ et des fonctions auxquelles elle s'applique.

Dans la suite, on supposera que

$$\|u_1 - u_{1,\delta}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{w_\delta \in X_\delta} \|u_1 - w_\delta\|_{H^1(\Omega)}$$

PARTIE B : UNE BASE SPECTRALE

Question 8. Soit v une fonction de $H_0^1(\Omega)$. Montrer que $v = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{v}_i u_i$ avec

$$\hat{v}_i = \int_{\Omega} v u_i dx.$$

Exprimez les normes L^2 et H_0^1 de v en terme des \hat{v}_i et des λ_i .

Question 9. Notons $Y_n = \{w_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i\}$. En utilisant la décomposition dans le système total des u_i , montrer que

$$\inf_{w_n \in Y_n} \|v - w_n\|_{L^2(\Omega)} \leq c \lambda_{n+1}^{-1} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\inf_{w_n \in Y_n} \|v - w_n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \lambda_{n+1}^{-1/2} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

dès que $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Que peut on dire si $\Delta v \in H_0^1(\Omega)$.

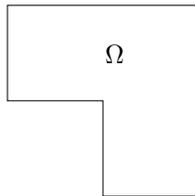
Question 10. On suppose maintenant que pour tout $q \leq p$, $(\Delta)^q v \in H_0^1(\Omega)$, ici $(\Delta)^q v$ désigne la fonction sur laquelle on a appliqué p fois l'opérateur de Laplace, c'est à dire par exemple $(\Delta)^2 v = \Delta(\Delta v)$. Montrer que

$$\inf_{w_n \in Y_n} \|v - w_n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \lambda_{n+1}^{-p} \|(\Delta)^p v\|_{H^1(\Omega)}$$

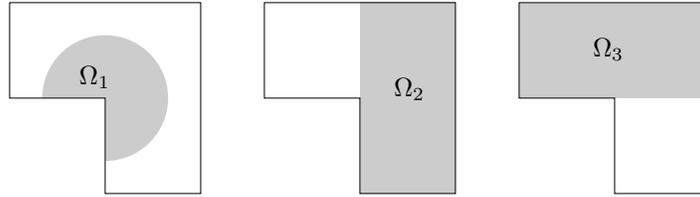
Question 11. Une application annexe peut être donnée par l'approximation de la solution du problème (avec second membre) : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$. Ecrire la formulation variationnelle de ce problème puis sa discrétisation sur l'espace discret Y_n . Donner une estimation de l'erreur entre la solution (exacte) u et la solution issue de cette discrétisation variationnelle lorsque $f \in L^2(\Omega)$ ou $f \in H_0^1(\Omega)$. Quelle régularité suffit il de supposer sur f pour que la convergence soit plus rapide ?

PARTIE C : UNE DISCRÉTISATION DE TYPE BASE RÉDUITE

On suppose maintenant que le domaine peut être décomposé en une union recouvrante de sous-domaines, par exemple pour le domaine Ω en "L" sur lequel on va désormais focaliser notre attention :



On propose la décomposition en trois sous domaines $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Omega^3$ suivante :



Sur chacun des domaines Ω^k , on considère les problèmes aux valeurs propres : trouver $u^k \in H_0^1(\Omega^k)$ et $\lambda^k \in \mathbb{R}$ tels que

$$-\Delta u^k = \lambda^k u^k.$$

On note λ_i^k les valeurs propres de ce système et on les suppose rangées par ordre croissant, on note u_i^k les vecteurs propres associés que l'on choisit orthonormés dans $L^2(\Omega^k)$.

Question 12. Montrer que si l'on prolonge par 0 les fonctions u_i^k sur $\Omega \setminus \Omega^k$, on obtient encore des fonctions de $H_0^1(\Omega)$. On notera de la même façon ces fonctions vues sur Ω^k ou sur Ω .

Question 13. On suppose qu'il existe une partition de l'unité $1 = \sum_{k=1}^3 \chi^k$ avec des fonctions positives, régulières, telles que χ^k est à support dans l'adhérence de Ω^k et que de plus on peut choisir ces fonctions avec $\frac{\partial^m \chi^k}{\partial n^m}$ nulle sur $\partial\Omega^k$ pour tout entier m . On choisit de plus χ_1 égale à 1 sur un voisinage du coin rentrant. Montrer que si l'on avait décomposé Ω en seulement deux rectangles Ω^2 et Ω^3 , un tel choix de partition de l'unité par des fonctions régulières était impossible.

Question 14. Montrer que si $\Phi := u_1$ est la première fonction propre sur Ω , les fonctions $\Phi^k = \Phi \chi^k$ vérifient, pour tout entier p : $(\Delta)^p \Phi^k \in H_0^1(\Omega^k)$ (on se contentera de bien montrer avec $p = 1$ et on n'oubliera pas que H_0^1 requiert la régularité et l'annulation au bord).

Question 15. En déduire que

$$\inf_{w_n^k = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i^k} \|\Phi^k - w_n^k\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^k} \right)^p$$

la constante c dépendant de p mais pas de n .

Question 16. On introduit l'espace $X_n = \text{Vect}\{u_i^k, i = 1, \dots, n; 1 \leq k \leq 3\}$ que l'on utilise pour une approximation variationnelle de u_1 . Donner une majoration de l'erreur entre u_1 et son approximation.

Question 17. On suppose que, pour la même discrétisation, l'erreur entre la fonction propre exacte u_J associée à la J -ième valeur propre, et son approximation variationnelle $u_{J,n}$, vérifie aussi

$$\|u_J - u_{J,n}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{w_n \in X_n} \|u_J - w_n\|_{H^1(\Omega)}$$

Donnez le taux de convergence de l'approximation de u_J par $u_{J,n}$. Comment choisir n pour que, pour tout $j \leq J$ la méthode de discrétisation variationnelle converge.

Question 18. Quelle est la structure des matrices de masse et de rigidité du problème aux valeurs propres discret précédent ?

PARTIE D : UNE DISCRÉTISATION DE TYPE ÉLÉMENT FINI

Question 19. On suppose encore que Ω est le polygone en "L" précédent, décrivez une méthode simple de type éléments finis pour approcher ce problème. On présentera le type d'éléments finis utilisés, on donnera le type d'erreur auquel on peut s'attendre, on donnera aussi éléments comparatifs quant à la mise en oeuvre de cette méthode par rapport à la méthode en bases réduites de la Partie C (taille des matrices, structure des matrices, complexité des calculs).

Question 20. On suppose qu'une méthode du type précédent est utilisée pour approcher les fonctions propres u_i^k , $k = 1, \dots, 3$ de la partie B et que, faute de les connaître exactement, l'espace X_n est basé sur ces approximations $u_{i,h}^k$. On note par X_{nh} cet espace. Quelle est l'erreur entre u_J et l'approximation variationnelle dans cet espace X_{nh} ? La réponse attendue doit être justifiée heuristiquement, on ne demande pas d'entrer dans tous les détails.

Problème II: Optimisation de grands systèmes. (8 points)

Certains problèmes d'optimisation mettent en jeu de nombreux sous-systèmes. Ainsi, un parc de production électrique comprend en général un grand nombre d'unités de productions (centrales), couplées par la contrainte d'égaliser à chaque instant la quantité totale produite et la demande. De tels problèmes de grande taille peuvent être résolus efficacement au moyen des méthodes dites de *décomposition*, dont nous abordons ici quelques aspects.

PARTIE A : COUPLAGE PAR LES CONTRAINTES ET DÉCOMPOSITION PAR LES PRIX

On considère n unités de production. Pour chaque unité, on doit choisir un niveau de production u_i dans un ensemble donné U_i (le niveau de production modélise les paramètres d'exploitation, on peut avoir par exemple deux états, "marche" et "arrêt", ou bien un continuum d'états). On note J_i la fonction qui associe au niveau de production u_i un réel $J_i(u_i)$ représentant le coût d'exploitation de l'unité i . On note H_i la fonction qui associe au niveau de production u_i un vecteur $H_i(u_i) \in \mathbb{R}^m$ représentant les diverses quantités produites par l'unité i . On note $d \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de demande. On cherche à minimiser la somme des coûts d'exploitation des unités pour satisfaire la demande, ce qui revient à résoudre le problème d'optimisation :

$$\inf_{u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n} J_1(u_1) + \dots + J_n(u_n) \quad \text{s.t.} \quad H_1(u_1) + \dots + H_n(u_n) = d \quad (\text{II.1})$$

On notera $u = (u_1, \dots, u_n)$, $U = U_1 \times \dots \times U_n$, $J(u) = J_1(u_1) + \dots + J_n(u_n)$, et $F(u) = d - H_1(u_1) - \dots - H_n(u_n)$.

On fera dans tout ce sous-problème les hypothèses suivantes :

- chaque ensemble U_i est un fermé d'un espace vectoriel réel de dimension finie, $V_i = \mathbb{R}^{s_i}$, muni de son produit scalaire canonique;
- chaque application J_i est continue et infinie à l'infini sur U_i ;
- chaque application H_i est continue;
- il existe au moins un vecteur $u \in U$ vérifiant la contrainte de demande $F(u) = 0$.

On notera $V = V_1 \times \dots \times V_n$. On notera toujours $(u, v) \mapsto u \cdot v$ les produits scalaires des espaces considérés.

Question 1. *Montrer que le problème d'optimisation (II.1) admet un point de minimum. Quelles hypothèses pourrait-on rajouter pour conclure à l'unicité du point de minimum ?*

On imagine que le réseau est géré par un *coordonnateur* qui annonce un prix $p \in \mathbb{R}^m$: il paiera à l'exploitant de l'unité i le montant $p \cdot h$ pour la quantité $h \in \mathbb{R}^m$. L'exploitant i résout alors le problème local consistant à maximiser son bénéfice net, ce qui peut s'exprimer sous forme de minimisation :

$$\inf_{u_i \in U_i} J_i(u_i) - p \cdot H_i(u_i) \quad (\text{II.2})$$

Il s'agit de voir si cette procédure, dite de *décomposition par les prix*, peut conduire à l'optimum du problème global (II.1).

On note $\bar{U}_i(p)$ l'ensemble des solutions optimales de (II.2), et l'on pose $\bar{U}(p) = \bar{U}_1(p) \times \dots \times \bar{U}_n(p)$. On forme le Lagrangien

$$\mathcal{L}(u, p) = J(u) + p \cdot F(u) \quad ,$$

pour $u \in U$ et $p \in \mathbb{R}^m$.

Question 2. *Soient $\bar{p} \in \mathbb{R}^m$ et $\bar{u} \in U$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) (\bar{u}, \bar{p}) est point selle du Lagrangien, i.e.

$$\forall u \in U, \forall p \in \mathbb{R}^m, \quad \mathcal{L}(\bar{u}, p) \leq \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{p}) \leq \mathcal{L}(u, \bar{p}) \quad ;$$

(ii) $\bar{u} \in \bar{U}(\bar{p})$ et $F(\bar{u}) = 0$.

Conclure que lorsque ces assertions sont satisfaites, \bar{u} est solution du problème global (II.1).

Question 3. *Dans cette question seulement, on suppose que pour tout i , on a $U_i = V_i$, et que les fonctions J_i et H_i sont de la forme*

$$J_i(u_i) = \frac{1}{2} u_i \cdot A_i u_i \quad , \quad H_i(u_i) = B_i u_i \quad ,$$

où A_i est une matrice réelle symétrique définie positive de taille $s_i \times s_i$, B_i une matrice réelle de taille $m \times s_i$. Donner une formule explicite pour la solution $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ et la valeur $J(\bar{u})$ du problème (II.1), lorsque la matrice $C = B_1 A_1^{-1} B_1^* + \dots + B_n A_n^{-1} B_n^*$ est inversible. Que se passe-t-il si C n'est pas inversible ?

Question 4. On suppose maintenant que J_i est convexe différentiable, que H_i est affine, et que U_i est un intervalle borné de \mathbb{R} . On pourra noter $U_i = [\ell_i, L_i]$. Montrer que \mathcal{L} admet alors un point selle $(\bar{u}, \bar{p}) \in U \times \mathbb{R}^m$.

On appelle fonction duale associée au problème (II.1) la fonction \mathcal{G} qui à un prix $p \in \mathbb{R}^m$ associe :

$$\mathcal{G}(p) = \inf_{u \in U} J(u) + p \cdot F(u) .$$

Question 5. Montrer que si \mathcal{G} est différentiable et si $u \in \bar{U}(p)$, on a $\mathcal{G}'(p) = F(u)$.

On propose l'algorithme suivant. On fixe un pas $\epsilon > 0$. On choisit $p^0 \in \mathbb{R}^m$. Pour $k \geq 0$, on choisit

$$u^k \in \bar{U}(p^k) , \tag{II.3}$$

et l'on pose

$$p^{k+1} = p^k + \epsilon F(u^k) . \tag{II.4}$$

Question 6. De quel algorithme du cours cet algorithme est-t-il une variante ? Dire brièvement, par analogie avec le cours, sous quelles hypothèses on aura une convergence de u^k ou de p^k ?

Question 7. On considère le problème particulier :

$$\begin{aligned} & \inf_{u_1, u_2 \in [0, 1]} u_1 + 2u_2 \\ & u_1 + u_2 = 1.5 \end{aligned}$$

Calculer la solution optimale \bar{u} de ce problème, ainsi que le point de maximum \bar{p} de la fonction duale \mathcal{G} . L'algorithme (II.3), (II.4) fournit-il une suite p^k convergent vers \bar{p} ? Remplaçons plus généralement (II.4) par

$$p^{k+1} = p^k + \epsilon_k F(u^k) ,$$

avec $\epsilon_k > 0$. Expliquer de manière heuristique quel type de suite ϵ_k il convient de prendre pour espérer que la suite p^k converge vers \bar{p} . Peut-on espérer que la suite u^k converge vers \bar{u} ?

PARTIE B : PRINCIPE DU PROBLÈME AUXILIAIRE DANS LE CAS D'UN COUPLAGE PAR LE CRITÈRE

Considérons le nouveau problème d'optimisation :

$$\inf_{u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n} S_1(u_1) + \dots + S_n(u_n) + T(u_1, \dots, u_n) . \tag{II.5}$$

Ici, on suppose que U_i est un convexe fermé non-vidé d'un espace de Hilbert V_i dont la norme est notée $\|\cdot\|$. On note toujours $U = U_1 \times \dots \times U_n$, $V = V_1 \times \dots \times V_n$, $u = (u_1, \dots, u_n)$. On munit V de la norme $\|\cdot\|$ telle que $\|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_n\|^2$. On note $S(u) = S_1(u_1) + \dots + S_n(u_n)$. Les fonctions S_i et T sont supposées continues, convexes, et différentiables.

L'algorithme utilise une fonction auxiliaire K , de V dans \mathbb{R} , qui est continue, différentiable et α -convexe, pour un certain $\alpha > 0$. On fixe un pas $\epsilon > 0$. On définit une suite $u^k \in U$ comme suit. On choisit arbitrairement $u^0 \in U$. On définit u^{k+1} comme étant le point de minimum du problème :

$$\inf_{u \in U} K(u) + (\epsilon T'(u^k) - K'(u^k)) \cdot u + \epsilon S(u) . \tag{II.6}$$

Question 8. Pourquoi a-t-on existence et unicité du point de minimum de (II.6) ? Lorsque l'on choisit une fonction auxiliaire qui se décompose sous la forme $K(u) = K_1(u_1) + \dots + K_n(u_n)$, en quoi le problème (II.6) est-t-il plus facile que le problème initial (II.5) ?

Question 9. Écrire l'inéquation d'Euler caractérisant le point de minimum de (II.6). En déduire que si $u^{k+1} = u^k$, alors u^k est solution de (II.5).

On note u^\sharp une solution quelconque de (II.5). La preuve de convergence de l'algorithme utilise la fonction

$$\phi(u) = K(u^\sharp) - K(u) - K'(u) \cdot (u^\sharp - u) .$$

Question 10. *Rappeler brièvement pourquoi*

$$\phi(u) \geq \frac{\alpha}{2} \|u - u^\sharp\|^2 . \quad (\text{II.7})$$

Question 11. *Montrer que*

$$(K'(u^{k+1}) - K'(u^k)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) + \epsilon(T'(u^k) - T'(u^\sharp)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) \geq 0 . \quad (\text{II.8})$$

On suppose que pour tous $u, v \in U$,

$$\|T'(u) - T'(v)\| \leq \nu \|u - v\| , \quad (\text{II.9})$$

$$(T'(u) - T'(v)) \cdot (u - v) \geq a \|u - v\|^2 , \quad (\text{II.10})$$

où ν et a sont des constantes strictement positive.

Question 12. *Montrer que si $0 < \epsilon < 2\alpha a/\nu^2$, on peut trouver des constantes $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ telles que*

$$\phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) \geq \beta \|u^k - u^{k+1}\|^2 + \gamma \|u^\sharp - u^k\|^2 . \quad (\text{II.11})$$

Conclure que u^k converge alors vers u^\sharp .

CORRIGÉ DU CONTRÔLE CLASSANT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
«Analyse numérique et optimisation»
Mardi 29 Juin 2004

Durée : 4 heures

Sujet proposé par Stéphane Gaubert et Yvon Maday

Corrigé du Problème I: Méthode de synthèse modale avec recouvrement

PARTIE A : UNE APPROXIMATION ABSTRAITE

Réponse à la Question 1. Par intégration par partie et les équivalences classiques on obtient le système

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \lambda m(u, v) ,$$

avec $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ et $m(u, v) = \int_{\Omega} uv$.

Réponse à la Question 2. La question de l'existence étant supposée acquise, on voit donc que l'on doit résoudre, sur un domaine régulier le problème $-\Delta u = f$ avec $f = \lambda u$, et comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on en déduit que $f \in H_0^1(\Omega)$. De la régularité du domaine et de la régularité elliptique, on tire que la solution u de $-\Delta u = f$ est dans $H^3(\Omega)$, de quoi on déduit qu'en fait $f \in H^3(\Omega)$, ce qui nous amène par récurrence à une régularité de $u \in H^{2r+1}(\Omega)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Réponse à la Question 3. En dimension 1 il est évident que u vérifie l'équation $-u'' = \lambda u$ au sens fort si et seulement si $u(x) = A \exp(\sqrt{-\lambda}x) + B \exp(-\sqrt{-\lambda}x)$ (la racine pouvant être complexe). Les seules fonctions non identiquement nulles de ce type s'annulant en $+1$ et -1 font intervenir des exponentielles complexes, d'où l'on déduit que les fonctions propres sont $\lambda_k = k^2 \pi^2$ pour $k \in \mathbb{N}$ et les vecteurs propres $u_k(x) = \sin(k\pi x)$. En dimension 2 sur le carré $]0, 1[^2$, les valeurs propres sont les $(k^2 + \ell^2)\pi^2$ avec pour fonction propre correspondante $u(x, y) = \sin(k\pi x) \sin(\ell\pi y)$. Il suffit maintenant de normaliser ces vecteurs dans L^2 .

Réponse à la Question 4. C'est une question de cours :

$$\lambda_1 = \inf_{v \neq 0} \frac{a(v, v)}{m(v, v)}$$

Réponse à la Question 5. Choissant une base de X_{δ} , que l'on suppose de dimension N , le problème variationnel revient à un système matriciel du type : trouver $U \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$A_N U = \lambda M_N U \tag{I-A.1}$$

où A_M (resp. M_N) est la matrice de rigidité (resp. de masse) représentant a (resp. m) dans la base de X_{δ} . La matrice M_N étant définie positive, elle est diagonalisable dans une base orthonormée et les valeurs propres μ_i correspondantes sont > 0 . On appelle $\sqrt{M_N}$ la matrice qui dans cette base est diagonale avec sur la diagonale la valeur $\sqrt{\mu_i}$ à la place de μ_i . Il est clair que cette matrice est encore symétrique définie positive, donc inversible. Le problème (I-A.1) qui se pose est donc de trouver $U \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$[\sqrt{M_N}]^{-1} A_N [\sqrt{M_N}]^{-1} [\sqrt{M_N}] U = \lambda [\sqrt{M_N}] U$$

soit encore de trouver $W \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$[\sqrt{M_N}]^{-1} A_N [\sqrt{M_N}]^{-1} W = \lambda W$$

Le caractère symétrique défini positif de la matrice de ce système n'ayant échappé à personne, ceci permet d'affirmer qu'il existe exactement N valeurs propres, qui sont strictement positives. Les vecteurs propres associés sont orthogonaux entre eux si ils correspondent à des valeurs propres différentes, et ils peuvent être choisis orthogonaux si les valeurs propres sont les mêmes (multiples). Il ne reste plus qu'à multiplier ces vecteurs propres par $[\sqrt{M_N}]^{-1}$: on obtient ainsi des vecteurs propres solution de (I-A.1), qui sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire $(U, V) \mapsto U M_N V$ sur \mathbb{R}^N , correspondant au produit scalaire L^2 pour les fonctions représentées par les vecteurs U et V . Il ne reste plus qu'à normaliser les vecteurs ainsi obtenus vis à vis de la matrice de masse M_N (i.e. en norme L^2).

Réponse à la Question 6. C'est encore une question de cours

$$\lambda_{1\delta} = a(u_{1\delta}, u_{1\delta}) = \inf_{\substack{v \in X_\delta \\ v \neq 0}} \frac{a(v, v)}{m(v, v)}$$

On en déduit, l'espace des fonctions ou l'on prend l'infimum étant plus petit, que cette valeur propre discrète est plus grande que la valeur propre exacte.

Réponse à la Question 7. On a donc $m(v_\delta, v_\delta) = 1$ et ainsi

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) = a(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1) + 2a(u_1, v_\delta - u_1)$$

puis en utilisant que u_1 est valeur propre que

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) = a(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1) + 2\lambda_1 m(u_1, v_\delta - u_1)$$

on développe alors

$$2m(u_1, v_\delta - u_1) = 2m(u_1, v_\delta) - 2 = 2m(u_1, v_\delta) - m(u_1, u_1) - m(v_\delta, v_\delta)$$

soit effectivement

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) = a(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1) - \lambda_1 \tilde{m}(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1)$$

Bien choisir v_δ , signifie que on prend $v_\delta = \frac{\tilde{v}_\delta}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}}$ où \tilde{v}_δ est la projection H^1 de u_1 :

$$\tilde{v}_\delta = \arg \min_{w_\delta \in X_\delta} \|u_1 - w_\delta\|_{H^1(\Omega)} .$$

Estimons maintenant $\|\tilde{v}\|_{L^2}$ (et montrons en particulier que $\|\tilde{v}\|_{L^2} \neq 0$, de sorte que v_δ est bien défini) en supposant que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon_\delta = 0$$

où $\varepsilon_\delta = \inf_{w_\delta \in X_\delta} \|u_1 - w_\delta\|_{H^1(\Omega)}$ (sinon, l'inégalité demandée est triviale).

Par inégalité triangulaire, on obtient tout d'abord que

$$|1 - \|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}| = \left| \|u_1\|_{L^2} - \|\tilde{v}_\delta\|_{L^2} \right| \leq \|u_1 - \tilde{v}_\delta\|_{L^2} \leq \|u_1 - \tilde{v}_\delta\|_{H^1} = \varepsilon_\delta . \quad (\text{I-A.2})$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_1 - v_\delta\|_{H^1} &= \left\| u_1 - \frac{\tilde{v}_\delta}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}} \right\|_{H^1} \\ &\leq \|u_1 - \tilde{v}_\delta\|_{H^1} + \left\| \tilde{v}_\delta - \frac{\tilde{v}_\delta}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}} \right\|_{H^1} \\ &\leq \|u_1 - \tilde{v}_\delta\|_{H^1} + \|\tilde{v}_\delta\|_{H^1} \left| 1 - \frac{1}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}} \right| \\ &\leq c(\varepsilon_\delta + |1 - \frac{1}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}}|) \end{aligned}$$

On remarque que si ε_δ est assez petit, d'après (I-A.2), la contribution $|1 - \frac{1}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}}| \leq c\varepsilon_\delta$ et donc

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) \leq c \inf_{w_\delta \in X_\delta} \|u_1 - w_\delta\|_{H^1(\Omega)}^2$$

et il suffit maintenant d'appliquer le quotient de Rayleigh discret pour conclure.

PARTIE B : UNE BASE SPECTRALE

Réponse à la Question 8. Si $v = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{v}_i u_i$ alors $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{v}_i^2$ et $\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \hat{v}_i^2$.

Réponse à la Question 9. Il faut évaluer ici la décroissance des \hat{v}_i , on part de leur définition

$$\hat{v}_i = \int_{\Omega} v u_i dx$$

et on utilise le fait que les u_i sont des vecteurs propres

$$\hat{v}_i = \int_{\Omega} v \frac{1}{\lambda_i} (-\Delta u_i) dx = \frac{1}{\lambda_i} \int_{\Omega} (-\Delta v) u_i dx = -\frac{1}{\lambda_i} \widehat{\Delta v}_i$$

où $\widehat{\Delta v}_i$ représente la composante de Δv dans le développement

$$\Delta v = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\Delta v}_i u_i$$

on remarque à ce stade que

$$\|\Delta v\|_{L^2}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i \hat{v}_i)^2$$

On n'a plus qu'à écrire

$$\begin{aligned} \inf_{w_n = \sum_{i=0}^n \hat{w}_i u_i} \|v - w_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|v - \sum_{i=0}^n \hat{v}_i u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \hat{v}_i u_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (\hat{v}_i)^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2} (\hat{v}_i)^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} (\lambda_i \hat{v}_i)^2 \end{aligned}$$

cette dernière inégalité découlant de la croissance des valeurs propres, et l'on conclut en notant que

$$\inf_{w_n = \sum_{i=0}^n \hat{w}_i u_i} \|v - w_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i \hat{v}_i)^2 = \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \|\Delta v\|_{L^2}^2$$

En procédant de même pour la norme H^1 on obtient

$$\inf_{w_n = \sum_{i=0}^n \hat{w}_i u_i} \|v - w_n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\Delta v\|_{L^2}^2$$

Réponse à la Question 10. En réitérant l'utilisation de l'égalité $u_i = \frac{\Delta u_i}{\lambda_i}$ on obtient

$$\hat{v}_i = \frac{(-1)^p}{\lambda_i^p} \widehat{\Delta^p v}_i$$

et l'estimation demandée en découle immédiatement.

Réponse à la Question 11. La formulation variationnelle demandée est : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

La discrétisation sur Y_n est : Trouver $u^n \in Y_n$ telle que

$$\forall v \in Y_n, \quad \int_{\Omega} \nabla u^n \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

On sait qu'il existe une solution unique à ce problème et qu'elle vérifie l'estimation

$$\|u - u^n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{v \in Y_n} \|u - v\|_{H^1(\Omega)}$$

et d'après la question précédente

$$\|u - u^n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \|\Delta v\|_{L^2} = c \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \|f\|_{L^2}$$

Pour avoir une convergence plus rapide, on souhaite utiliser les résultats de la question 10). La régularité est donc à demander sur $(\Delta)^p f$ et qui donne

$$\|u - u^n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \frac{1}{\lambda_{n+1}^{p+1}} \|(\Delta)^{p+1} v\|_{H^1} = c \frac{1}{\lambda_{n+1}^{p+1}} \|(\Delta)^p f\|_{H^1}$$

PARTIE C : UNE DISCRÉTISATION DE TYPE BASE RÉDUITE

Réponse à la Question 12. Soit v une fonction quelconque de $H_0^1(\Omega^k)$ et \tilde{v} la fonction prolongée par 0 sur $\Omega \setminus \Omega^k$. Il est tout d'abord évident que $\tilde{v} \in L^2$. Ensuite, par intégration par partie, et pour tout $w \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} w = \int_{\Omega^k} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} w = - \int_{\Omega^k} v \frac{\partial w}{\partial x} = - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x}$$

on note qu'aucun terme de bord n'est apparu dans cette intégration par partie puisque v est nul sur $\partial\Omega^k$. On déduit de cette égalité que $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \in L^2$, on procède de même pour $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$ ce qui montre que \tilde{v} est bien dans $H^1(\Omega)$. Qu'il soit dans $H_0^1(\Omega)$ découle du fait qu'il est nul sur $\partial\Omega$.

Réponse à la Question 13. Avec seulement 2 rectangles, il y a clairement un problème au coin concave c_0 . En effet, si une telle partition de l'unité existait, sa trace sur le bord de chacun des sous domaine serait aussi régulière. Or, au voisinage du coin rentrant, χ^1 doit valoir 1 sur l'intersection de la frontière de Ω avec la frontière de Ω^1 et 0 sur la frontière de Ω^1 dans Ω .

Réponse à la Question 14. La fonction Φ^k est de classe C^∞ en dehors des coins, comme produit de fonctions C^∞ . Par ailleurs, on note que

$$\Delta \Phi^k = \Delta[(\chi^k)\Phi] = [\Delta\Phi]\chi^k + 2\nabla\chi^k\nabla\Phi + \Phi[\Delta\chi^k]$$

puis, au voisinage de chaque coin, $\nabla\chi^k$ (et donc $\Delta\chi^k$) est identiquement nulle. Il reste à remarquer que $\Delta\Phi = \lambda_1\Phi$, pour conclure à la régularité, au moins H^1 de Φ^k . Regardons maintenant la valeur au bord de Φ^k . On reprend la même décomposition et on remarque que $[\Delta\Phi]\chi^k = [\lambda_1\Phi]\chi^k$ est nulle au bord car $\Phi \in H_0^1(\Omega)$ et χ^k est nulle sur $\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega$. Il en découle aussi que $\Phi[\Delta\chi^k]$ est nulle au bord de Ω^k . La nullité au bord de $\nabla\chi^k\nabla\Phi$ est un peu plus subtile. Il faut en effet remarquer que, sur un coté (éventuellement courbe) de Ω^k , soit χ^k est identiquement nulle, auquel cas $\nabla\chi^k$ est nulle, soit Φ est nulle, donc la trace de sa dérivée tangentielle est nulle et le gradient $\nabla\Phi$ est normal à ce morceau de frontière. L'hypothèse faite sur χ^k d'avoir une dérivée normale nulle permet ainsi de conclure à la nullité de cette dernière contribution sur le bord de Ω^k . La démonstration générale ($p > 1$) suit le même schéma. En effet $\Delta^p\Phi^k$ est la somme de $[\Delta^p\Phi]\chi^k$ et d'autres termes qui font apparaître des dérivées de χ^k . Ces derniers s'annulent aux voisinages des sommets et donc les seules irrégularités de $\Delta^p\Phi^k$, aux sommets, pourraient venir de $[\Delta^p\Phi]\chi^k = [\lambda_1]^p\Phi\chi^k$ qui est H^1 .

Réponse à la Question 15. La majoration demandée découle de la question 10) et de la régularité de $(\Delta)^p\Phi^k$ que l'on vient d'établir.

Réponse à la Question 16. Soit v_n^k la meilleure approximation de Φ^k évoqué dans la question précédente. De l'égalité

$$u_1 = \Phi = \Phi^1 + \Phi^2 + \Phi^3$$

on en déduit qu'une bonne approximation de u_1 est donnée par $v_n^1 + v_n^2 + v_n^3$ et qu'ainsi

$$\inf_{w_n \in X_n} \|u_1 - w_n\|_{H^1} \leq c \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^k} \right)^p$$

On utilise maintenant la majoration abstraite de la question 7) pour déduire que la solution propre discrète (notée $u_{1,n}$) sur l'espace X_n vérifie également

$$\|u_1 - u_{1,n}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^k} \right)^p$$

Réponse à la Question 17. Ce que l'on a fait pour la première fonction propre peut également être fait pour la seconde et toutes les suivantes. La seule distinction est que

$$\|(\Delta)^p[u_J \chi^k]\|_{H^1} \leq c(\lambda_J)^p$$

avec une constante c ne dépendant que de p est de la partition de l'unité (mais pas de J). Ceci conduit à la majoration

$$\|u_J - u_{J,n}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\frac{\lambda_J}{\lambda_{n+1}^k} \right)^p$$

la convergence de la méthode équivaut à $\frac{\lambda_J}{\lambda_{n+1}^k} < 1$

Réponse à la Question 18. Les matrices de masse et de rigidité sont pleines, elles ont une structure bloc 3×3 correspondant aux 3 sous domaines. Les bases locales (à chaque sous domaine) étant orthonormées, on en déduit que les blocs diagonaux sont eux même diagonaux (égaux d'ailleurs à l'identité pour la matrice de masse et faisant apparaître les valeurs propres λ_i^k dans la matrice de rigidité.)

PARTIE D : UNE DISCRÉTISATION DE TYPE ÉLÉMENT FINI

Réponse à la Question 19. Une méthode de type éléments finis simple va reposer sur des éléments de type Lagrange (le cadre étant H^1) de degré 1 (à cause de la singularité des solutions propres). Par contre on peut se permettre d'utiliser un maillage raffiné dans les coins pour mieux s'adapter aux singularités éventuelle de la solution. L'erreur est alors au moins en $\mathcal{O}(h^{2/3})$ où h est la taille du maillage puisque l'on peut s'attendre à voir la première singularité en $1 + \frac{\pi}{\omega}$ ou ω est le plus grand angle du domaine (ici $\frac{3\pi}{2}$). En fait, à cause de la forme spéciale, cette première singularité n'est pas apparente et la convergnec est en fait en $\mathcal{O}(h)$. Néanmoins, on est loin de la convergence exponentielle de la méthode en base réduite précédente qui utilise des fonctions ad'hoc, qui approchent bien mieux les singularités. Le nombre de degrés de libertés pour une approximation en éléments finis est donc bien supérieur pour obtenir une approximation de la même précision. Par contre la structure des matrices en présence dans l'approximation en éléments finis est beaucoup plus agréable puisque, comme d'habitude, elles sont creuses.

Réponse à la Question 20. Si les vecteurs propres locaux sont évalués par un calcul en éléments finis on remplace ainsi les u_i^k par des $(u_i^k)_h$ qui vérifient

$$\|u_i^k - (u_i^k)_h\|_{H^1} \leq ch^{2/3}$$

au moins. Cette erreur est à ajouter à l'approximation en base réduite et l'on obtient, à la place de la solution $u_{1,n}$ de la question 16) une solution $u_{1,n,h}$ qui vérifie

$$\|u_1 - u_{1,n,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^k} \right)^p + h^{2/3} \right)$$

L'interet qui subsiste de cette approche est que la valeur de h que l'on utilise alors sur chacuns des sous domaines peut être plus petit que celui qui est utilisé dans la question 19) se rapportant au domaine entier.

Corrigé du Problème II: Optimisation de grands systèmes

PARTIE A : COUPLAGE PAR LES CONTRAINTES ET DÉCOMPOSITION PAR LES PRIX

Réponse à la Question 1. Notons $U_{\text{ad}} = U \cap F^{-1}(0)$ l'ensemble des solutions admissibles. Comme les U_i sont fermés, $U = U_1 \times \dots \times U_n$ est fermé. Comme F est continue, $F^{-1}(0)$ est fermé. L'ensemble U_{ad} est donc un fermé d'un espace vectoriel de dimension finie. Par hypothèse, U_{ad} est non-vide. L'application J qui est continue et infinie à l'infinie sur U_{ad} , atteint donc son minimum. Enfin, si les applications J_i sont strictement convexes, l'application J est strictement convexe, si les applications H_i sont affines et si les U_i sont convexe, l'ensemble admissible est convexe : le point de minimum est alors unique.

Réponse à la Question 2. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
J(\bar{u}) + p \cdot F(\bar{u}) &\leq J(\bar{u}) + \bar{p} \cdot F(\bar{u}) \quad \forall p \in \mathbb{R}^m \\
(p - \bar{p}) \cdot F(\bar{u}) &\leq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^m \\
q \cdot F(\bar{u}) &\leq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^m \\
q \cdot F(\bar{u}) \leq 0 \text{ et } -q \cdot F(\bar{u}) &\leq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^m \\
q \cdot F(\bar{u}) &= 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^m \\
F(\bar{u}) &= 0
\end{aligned}$$

donc la première inégalité de point selle est équivalente à $F(\bar{u}) = 0$. La seconde inégalité de point selle exprime le fait que la fonction $u \mapsto \mathcal{L}(u, \bar{p})$ est minimale en $u = \bar{u}$. Or $\mathcal{L}(u, \bar{p}) = p \cdot d + f(u)$, où $f(u)$ est de la forme $f_1(u_1) + \dots + f_n(u_n)$, avec $f_i(u_i) = J_i(u_i) - \bar{p} \cdot H_i(u_i)$. L'équivalence demandée résulte du fait que $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ est point de minimum de $f_1(u_1) + \dots + f_n(u_i)$ sur $U_1 \times \dots \times U_n$ si et seulement si chaque \bar{u}_i est point de minimum de f_i sur U_i (le "si" est immédiat ; pour prouver le "seulement si", considérer u tel que $u_j = \bar{u}_j$ pour $j \neq i$).

Enfin, en utilisant la seconde inégalité de point selle et $F(\bar{u}) = 0$, on a $\inf_{u \in U, F(u)=0} J(u) \geq \inf_{u \in U} J(u) + \bar{p} \cdot F(u) = J(\bar{u}) + \bar{p} \cdot F(\bar{u}) = J(\bar{u})$, ce qui montre que \bar{u} est point de minimum du problème initial.

Réponse à la Question 3. Les applications J_i sont fortement convexes, car les matrices A_i sont symétriques définies positives. D'après la Question 1, le point de minimum \bar{u} existe et est unique. Pour le calculer, profitons de la question précédente : il suffit de trouver (\bar{u}, \bar{p}) tel que $\bar{u} \in \bar{U}(p)$ et $F(\bar{u}) = 0$. Or $\bar{u} \in \bar{U}(p)$ si et seulement si pour tout i , \bar{u}_i est point de minimum de la fonction $f_i(u_i) = \frac{1}{2}u_i \cdot A_i u_i - p \cdot B_i u_i$. Comme J_i , et donc f_i , est convexe, \bar{u}_i est point de minimum de f_i sur V_i si et seulement si $f'_i(u_i) = A_i u_i - B_i^* p = 0$, soit $u_i = A_i^{-1} B_i^* p$. Il reste à satisfaire $F(\bar{u}) = 0$. En substituant dans $F(\bar{u}) = 0$, on trouve $C\bar{p} = d$, avec $C = B_1 A_1^{-1} B_1^* + \dots + B_n A_n^{-1} B_n^*$. Si C est inversible, on peut prendre $\bar{p} = C^{-1}d$, ce qui montre que la solution du problème est $\bar{u}_i = A_i^{-1} B_i^* C^{-1}d$. Un simple calcul donne enfin la valeur $J(\bar{u}) = \frac{1}{2}d \cdot C^{-1}d$.

Si C n'est pas inversible, on sait cependant a priori que l'équation $C\bar{p} = d$ a une solution. En effet, le problème (II.1) ayant une solution, on peut déduire du théorème de Kuhn et Tucker (voir le corrigé de la Question 4 pour plus de détails à ce sujet) qu'il existe un multiplicateur $p \in \mathbb{R}^m$ tel que $J'(u) + p \cdot F'(u) = 0$, ce qui est équivalent à $A_i u_i - B_i^* p = 0$, pour tout i . Il suffit donc de refaire le calcul qui précède en prenant pour \bar{p} une solution quelconque de $C\bar{p} = d$.

Notons enfin (cela n'était pas demandé) que l'on peut interpréter géométriquement l'hypothèse d'inversibilité de C , car $\text{im } C = \text{im } B_1 + \dots + \text{im } B_n$ (nous écrivons im pour "image", en identifiant une matrice et l'application linéaire qu'elle représente.) Pour voir cela, notons que $C = \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^*$, où \mathcal{A} est la matrice diagonale par blocs formée à partir des blocs A_i , et $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_n)$. Comme \mathcal{B} est un diviseur à gauche de C , on a $\text{im } C \subset \text{im } \mathcal{B}$. Par ailleurs $\mathcal{B} = \text{im } B_1 + \dots + \text{im } B_n$. Pour avoir l'autre inclusion, il suffit de montrer que $\text{im } C^\perp \subset \text{im } \mathcal{B}^\perp$. Or si $q \in \text{im } C^\perp$, $q \cdot Cq = 0$, et comme $q \cdot Cq = q \cdot \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^* q = \mathcal{B}^* q \cdot \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^* q$ et \mathcal{A}^{-1} est définie positive, $\mathcal{B}^* q = 0$, soit $q \in \text{im } \mathcal{B}^\perp$. Comme C est un endomorphisme de \mathbb{R}^m , C est inversible si et seulement si sont image, $\text{im } B_1 + \dots + \text{im } B_n$, coïncide avec \mathbb{R}^m , c'est-à-dire, si et seulement si tout vecteur de demande de \mathbb{R}^m est atteignable.

Réponse à la Question 4. Notre problème revient à minimiser J sous les contraintes $F(u) = 0$ et $\ell_i - u_i \leq 0$, $u_i - L_i \leq 0$. Introduisons des multiplicateurs de Lagrange $q_i \geq 0$ et $Q_i \geq 0$ afin de dualiser ces dernières contraintes, et formons le nouveau Lagrangien :

$$\mathcal{L}^+(u, p, q, Q) = J(u) + p \cdot F(u) + \sum_{1 \leq i \leq n} q_i (\ell_i - u_i) + Q_i (u_i - L_i) .$$

On sait (Question 1) que l'optimum du problème (II.1) est atteint en un point \bar{u} . On va appliquer le théorème de Kuhn et Tucker pour conclure qu'il existe $\bar{p} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{q}, \bar{Q} \in \mathbb{R}_+^n$, tels que $(\bar{u}, (\bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}))$ soit point selle du Lagrangien \mathcal{L}^+ sur $V \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n)$. (On applique en fait la remarque qui suit le théorème de Kuhn et Tucker, concernant le cas de contraintes d'égalités affine). Vérifions les hypothèses de Kuhn et Tucker : le critère est convexe, continu, dérivable; les applications définissant les contraintes inégalités sont affines (a fortiori convexes, continues, dérivables); et l'application F définissant les contraintes égalités est affine. Enfin, comme toutes les contraintes sont affines, les contraintes sont automatiquement qualifiées en \bar{u} (cela

résulte de la Remarque 10.2.22). Ces hypothèses étant vérifiées, on a bien

$$\mathcal{L}^+(\bar{u}, p, q, Q) \leq \mathcal{L}^+(\bar{u}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}) \leq \mathcal{L}^+(u, \bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}), \quad \forall u \in V, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}_+^n, Q \in \mathbb{R}_+^n. \quad (\text{II-A.1})$$

Comme \bar{u} est un point admissible, $\ell_i - \bar{u}_i \leq 0$, $\bar{u}_i - L_i \leq 0$, donc

$$\sup_{q, Q \in \mathbb{R}_+^n} \mathcal{L}^+(\bar{u}, p, q, Q) = \mathcal{L}(\bar{u}, p)$$

(le sup est atteint en $q = Q = 0$). Par ailleurs, pour $u \in U$, on a $\bar{q}_i(\ell_i - u_i) \leq 0$ et $\bar{Q}_i(u_i - L_i) \leq 0$, donc $\mathcal{L}^+(u, \bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}) \leq \mathcal{L}(u, \bar{p})$. Enfin, la condition des écarts complémentaires contenue dans le théorème de Kuhn et Tucker montre que $\bar{q}_i(\ell_i - \bar{u}_i) = 0$ et $\bar{Q}_i(\bar{u}_i - L_i) = 0$, et donc $\mathcal{L}^+(\bar{u}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}) = \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{p})$. On déduit ainsi de (II-A.1) que (\bar{u}, \bar{p}) est un point selle de \mathcal{L} sur U .

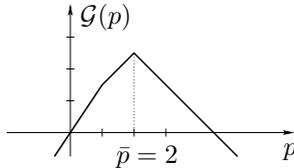
Réponse à la Question 5. Si $u \in \bar{U}(p)$, on a pour tout $q \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{G}(p+q) \leq J(p+q) + (p+q) \cdot F(u) = \mathcal{G}(p) + q \cdot F(u)$. Donc la fonction $q \mapsto \mathcal{G}(p+q) - q \cdot F(u)$ est maximale en $q = 0$. En dérivant, on trouve $\mathcal{G}'(p) = F(u)$.

Réponse à la Question 6. On reconnaît un algorithme de type Uzawa. La preuve du Théorème 10.5.9 du cours, relatif à l'algorithme d'Uzawa, dans le cas de contraintes inégalités, s'adapte sans difficulté au cadre présent, le seul point étant de remarquer que dans le cas d'une contrainte égalité $F(u) = 0$, F doit être affine et non pas convexe. La convergence de u^k vers \bar{u} sera donc garantie s'il existe un point selle, si J est fortement convexe, si F est affine (F est alors automatiquement Lipschitzienne), et si les U_i sont des convexes (fermés). Notons également que d'après la question précédente, l'algorithme d'Uzawa coïncide avec l'algorithme de gradient pour maximiser la fonction duale \mathcal{G} , lorsque celle-ci est différentiable. Le Théorème 10.5.4 relatif à l'algorithme de gradient montre donc que p^k convergera vers \bar{p} si la fonction duale \mathcal{G} est fortement convexe, différentiable, et de dérivée Lipschitzienne.

Réponse à la Question 7. La solution optimale est évidemment $\bar{u}_1 = 1$ et $\bar{u}_2 = 0.5$ (des deux fournisseurs, le moins cher ne peut livrer que 1, on achète la demande de 0.5 restante à l'autre fournisseur). La fonction duale vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p) &= \inf_{u_1 \in [0,1]} u_1 - pu_1 + \inf_{u_2 \in [0,1]} 2u_2 - pu_2 + 1.5p, \\ &= \min(0, 1-p) + \min(0, 2-p) + 1.5p, \end{aligned}$$

soit



L'optimum est $\bar{p} = 2$. La dérivée $\mathcal{G}'(p)$ prend les valeurs $+1$ à gauche de \bar{p} et -1 à droite de \bar{p} : en utilisant le fait que $\mathcal{G}'(p^k) = F(u^k)$ en tout point de différentiabilité de \mathcal{G} (Question 5), on voit aussitôt que l'on aura un comportement oscillant $p^{k+1} = p^k + \epsilon$, $p^{k+2} = p^{k+1} - \epsilon$, par exemple pour $p^0 < \bar{p}$ et p^0 proche de \bar{p} . Cette difficulté est liée à la non-différentiabilité de \mathcal{G} . Il faudrait prendre un pas ϵ_k tendant vers 0, de manière à supprimer l'oscillation, tout en faisant en sorte que $\sum_k \epsilon_k = +\infty$. Cependant, on a $\bar{U}(p) = (1, 0)$ pour $p < \bar{p}$ et p proche de \bar{p} , et $\bar{U}(p) = (1, 1)$ pour $p > \bar{p}$: même même avec une telle suite ϵ_k pour laquelle p^k convergera vers \bar{p} , u^k ne convergera pas vers \bar{u} (sauf peut être dans le cas exceptionnel où $p^k = \bar{p}$ pour un certain k).

PARTIE B : PRINCIPE DU PROBLÈME AUXILIAIRE DANS LE CAS D'UN COUPLAGE PAR LE CRITÈRE

Réponse à la Question 8. La fonction à minimiser est somme d'une fonction fortement convexe, K , et d'une fonction convexe, $u \mapsto (\epsilon T'(u^k) - K'(u^k)) \cdot u + \epsilon S(u)$. Elle est donc fortement convexe, et elle est évidemment continue. L'ensemble admissible est un convexe, fermé, non-vide, d'un Hilbert. Le minimum est donc atteint en un unique point.

Le problème (II.6) se décompose en n sous-problèmes indépendants. En effet, la solution du problème de minimisation (II.6) est de la forme $u = (u_1, \dots, u_n)$, où chaque u^i est obtenu comme solution du sous-problème :

$$\inf_{u_i \in U_i} K_i(u_i) + \pi_i(\epsilon T'(u^k) - K'(u^k)) \cdot u_i + \epsilon S_i(u_i) ,$$

où π_i désigne la projection de V dans V_i qui à (u_1, \dots, u_n) associe u_i .

Réponse à la Question 9. L'application que l'on minimise étant convexe et différentiable, et l'ensemble admissible étant convexe, une condition nécessaire et suffisante pour que u soit un point minimum du problème (II.6) est que l'inéquation d'Euler soit vérifiée, soit en l'occurrence :

$$(K'(u) + \epsilon T'(u^k) - K'(u^k) + \epsilon S'(u)) \cdot (v - u) \geq 0, \quad \forall v \in U \quad (\text{II-B.2})$$

Si l'optimum est atteint en $u = u^{k+1}$, il vient après simplification et division par ϵ :

$$(T'(u^k) + S'(u^k)) \cdot (v - u^k) \geq 0, \quad \forall v \in U . \quad (\text{II-B.3})$$

On reconnaît ici l'inéquation d'Euler au point u^k pour le problème consistant à minimiser la fonction convexe différentiable $T + S$ sur le convexe U . Le point u^k est donc point de minimum pour ce problème.

Réponse à la Question 10. La Proposition 10.1.5 du cours montre que l' α -convexité de K est équivalente à la propriété

$$K(v) \geq K(u) + K'(u) \cdot v - u + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2 , \quad \forall u, v \in U .$$

En posant $v = u^\sharp$, on obtient aussitôt

$$\phi(u) \geq \frac{\alpha}{2} \|u - u^\sharp\|^2 .$$

Réponse à la Question 11. En prenant $v = u^\sharp$ dans l'inéquation d'Euler (II-B.2) évaluée en $u = u^{k+1}$, il vient

$$(K'(u^{k+1}) + \epsilon T'(u^k) - K'(u^k) + \epsilon S'(u^k)) \cdot (v - u^{k+1}) \geq 0, \quad \forall v \in V . \quad (\text{II-B.4})$$

Comme u^\sharp est point de minimum de $T + S$ sur U , on a aussi :

$$(T'(u^\sharp) + S'(u^\sharp)) \cdot (v - u^\sharp) \geq 0 , \quad \forall v \in V . \quad (\text{II-B.5})$$

En prenant $v = u^\sharp$ dans (II-B.4) et $v = u^{k+1}$ dans (II-B.5), en multipliant (II-B.5) par ϵ , et en sommant, il vient

$$(K'(u^{k+1}) + \epsilon T'(u^k) - K'(u^k) + \epsilon S'(u^{k+1})) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) + \epsilon(T'(u^\sharp) + S'(u^\sharp)) \cdot (u^{k+1} - u^\sharp) \geq 0$$

soit

$$\begin{aligned} & (K'(u^{k+1}) - K'(u^k)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) + \epsilon(T'(u^k) - T'(u^\sharp)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) \\ & \geq \epsilon(S'(u^{k+1}) - S'(u^\sharp)) \cdot (u^{k+1} - u^\sharp) \geq 0 , \end{aligned}$$

car S est convexe.

Réponse à la Question 12. On a

$$\begin{aligned} \phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) &= K(u^{k+1}) - K(u^k) + K'(u^{k+1}) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) - K'(u^k) \cdot (u^\sharp - u^k) \\ &\geq K'(u^k) \cdot (u^{k+1} - u^k) + \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + K'(u^{k+1}) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) - K'(u^k) \cdot (u^\sharp - u^k) \\ &= \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + (K'(u^{k+1}) - K'(u^k)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) \end{aligned}$$

où l'on a d'abord utilisé l' α -convexité de K , et simplifié ensuite. En utilisant maintenant l'inégalité (II.8), on déduit que

$$\begin{aligned} \phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) &\geq \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon(T'(u^\sharp) - T'(u^k)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) \\ &= \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon(T'(u^\sharp) - T'(u^k)) \cdot (u^\sharp - u^k) + \epsilon(T'(u^\sharp) - T'(u^k)) \cdot (u^k - u^{k+1}) \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon a \|u^\sharp - u^k\|^2 - \epsilon \nu \|u^\sharp - u^k\| \|u^k - u^{k+1}\| , \end{aligned}$$

en utilisant (II.9), (II.10) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous pouvons minorer le dernier terme par

$$\frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon a \|u^\sharp - u^k\|^2 - \frac{\epsilon \nu}{2\delta} \|u^\sharp - u^k\|^2 - \frac{\epsilon \nu \delta}{2} \|u^k - u^{k+1}\|^2 ,$$

pour un choix quelconque de $\delta > 0$. On a donc

$$\phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) \geq \frac{\alpha - \epsilon \nu \delta}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon \left(a - \frac{\epsilon \nu}{2\delta}\right) \|u^\sharp - u^k\|^2 .$$

On a bien la propriété demandée, à condition que les constantes

$$\beta = \frac{\alpha - \epsilon \nu \delta}{2}, \quad \gamma = \epsilon \left(a - \frac{\nu}{2\delta}\right)$$

soient toutes deux strictement positives, i.e., à condition que δ soit choisi tel que $\delta < \alpha/(\epsilon \nu)$ et $\delta > \nu/(2a)$. Dès que $\nu/(2a) < \alpha/(\epsilon \nu)$, i.e., dès que $\epsilon < 2\alpha a/\nu^2$, un tel choix est possible.

Montrons finalement la convergence de u^k vers u^\sharp . Il résulte de (II.11) que $\phi(u^{k+1}) \leq \phi(u^k)$. En outre, $\phi(u^k) \geq 0$, en vertu de (II.7). Ainsi, la suite $\phi(u^k)$ qui est décroissante et minorée converge vers une limite $\bar{\phi}$. Comme d'après (II.11), $\phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) \geq \gamma \|u^\sharp - u^k\|^2 \geq 0$, et $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) = \bar{\phi} - \bar{\phi} = 0$, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^\sharp - u^k\| = 0$, ce qui achève la preuve.