Ecole Polytechnique, Promotion 2001
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 29 avril 2003
Corrigé proposé par G. Allaire

1 Différences finies

1. Par périodicité il suffit de calculer, à chaque instant $n\Delta t$, les N valeurs $(u_j^n)_{1\leq j\leq N}$. Pour que le schéma

$$\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^n}{\Delta t}+\frac{5}{6}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n}{\Delta t}-\nu\frac{(\delta^2 u)_j^{n+1}+(\delta^2 u)_j^n}{2(\Delta x)^2}=0$$

soit bien défini, il faut donc que la matrice d'ordre N

$$A=\begin{pmatrix} 5/6+2c & 1/12-c & & & 1/12-c \\ 1/12-c & 5/6+2c & 1/12-c & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & 1/12-c & 5/6+2c & 1/12-c \\ 1/12-c & & & 1/12-c & 5/6+2c \end{pmatrix} \text{ avec } c=\frac{\nu\Delta t}{2(\Delta x)^2},$$

soit inversible. Pour cela, on vérifie que la forme quadratique associée est définie positive

$$Au\cdot u=c\sum_{j=1}^N(u_{j+1}-u_j)^2+\frac{1}{12}\sum_{j=1}^N(u_{j+1}+u_j)^2+\frac{4}{6}\sum_{j=1}^N u_j^2.$$

Le schéma est clairement consistant car, si $u_j^n=u(t_n,x_j)$, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^n}{\Delta t}+\frac{5}{6}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n}{\Delta t}&=\\ \frac{1}{12}\frac{\partial u}{\partial t}(t_n,x_{j+1})+\frac{5}{6}\frac{\partial u}{\partial t}(t_n,x_j)+\frac{1}{12}\frac{\partial u}{\partial t}(t_n,x_{j-1})+\mathcal{O}(\Delta t)&=\\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_n,x_j)+\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x),&\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{(\delta^2 u)_j^{n+1}+(\delta^2 u)_j^n}{2(\Delta x)^2}&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1},x_j)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n,x_j)+\mathcal{O}(\Delta x)\\ &=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n,x_j)+\mathcal{O}(\Delta x+\Delta t),\end{aligned}$$

donc l'erreur de troncature pour une solution régulière u est (au moins) de l'ordre de $\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x)$.

2. Pour montrer que le schéma est stable en norme L^2 on utilise l'analyse de Fourier. En reprenant les notations du polycopié, pour $k \in \mathbb{Z}$ on note $\hat{u}^n(k)$ le coefficient de Fourier qui vérifie, par application de la transformée de Fourier au schéma,

$$\frac{\hat{u}^{n+1}(k) - \hat{u}^n(k)}{\Delta t}\left(\frac{1}{12}e^{2i\pi k\Delta x} + \frac{5}{6} + \frac{1}{12}e^{-2i\pi k\Delta x}\right) -$$

$$\frac{\nu}{2(\Delta x)^2}(\hat{u}^{n+1}(k) + \hat{u}^n(k))\left(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}\right) = 0.$$

En regroupant les termes on obtient, en posant $\phi = 2\pi k\Delta x$,

$$\hat{u}^{n+1}(k) = A(k)\hat{u}^n(k) \quad \text{avec} \quad A(k) = \frac{5 + \cos\phi - \frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos\phi)}{5 + \cos\phi + \frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos\phi)}.$$

Par le théorème de Plancherel, le schéma est stable si et seulement si on a $-1 \leq A(k) \leq 1$, ce qui est équivalent à

$$-5-\cos\phi-\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\cos\phi) \leq 5+\cos\phi-\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\cos\phi) \leq 5+\cos\phi+\frac{6\nu\Delta t}{(\Delta x)^2}(1-\cos\phi)$$

qui est toujours vrai puisque $(1 - \cos\phi) \geq 0$.

Le schéma est donc stable en norme L^2 et consistant. Par le théorème de Lax 2.2.20 il est automatiquement convergeant.

3. Pour alléger les calculs on utilise des formules de Taylor centrées sur le point $((n + 1/2)\Delta t, j\Delta x)$. Dans toute la suite $u_j^n = u(t_n, x_j)$. On commence par les termes de dérivées en temps :

$$\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} = \frac{1}{12}\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1/2}, x_{j+1}) + \mathcal{O}(\Delta t)^3,$$

$$\frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\Delta t} = \frac{1}{12}\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1/2}, x_{j-1}) + \mathcal{O}(\Delta t)^3,$$

$$\frac{5}{6}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{5}{6}\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1/2}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t)^3.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1/2}, x_{j+1}) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1/2}, x_j) + \Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t_{n+1/2}, x_j) +$$

$$\frac{1}{2}(\Delta x)^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}(t_{n+1/2}, x_j) + \frac{1}{6}(\Delta x)^3\frac{\partial^4 u}{\partial t\partial x^3}(t_{n+1/2}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x)^4,$$

et, avec un résultat similaire en x_{j-1}, on en déduit

$$\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{5}{6}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1/2}, x_j) +$$

$$\frac{1}{12}(\Delta x)^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}(t_{n+1/2},x_j)+\mathcal{O}\left((\Delta t)^3+(\Delta x)^4\right).$$

On passe maintenant aux termes de dérivées en espace : d'après la formule (1.26) du polycopié on a

$$\frac{(\delta^2 u)_j^{n+1}}{(\Delta x)^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1},x_j)+\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_{n+1},x_j)+\mathcal{O}(\Delta x)^4.$$

Or

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1},x_j)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1/2},x_j)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}(t_{n+1/2},x_j)+\mathcal{O}(\Delta t)^2,$$

et

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_{n+1},x_j)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_{n+1/2},x_j)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}(t_{n+1/2},x_j)+\mathcal{O}(\Delta t)^2.$$

On a des développements similaires pour $\frac{(\delta^2 u)_j^n}{(\Delta x)^2}$ mais avec un pas $-\Delta t/2$. Par conséquent, en sommant on obtient

$$\frac{(\delta^2 u)_j^{n+1}+(\delta^2 u)_j^n}{2(\Delta x)^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1/2},x_j)+\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_{n+1/2},x_j)+\mathcal{O}\left((\Delta t)^2+(\Delta x)^4\right).$$

En dérivant deux fois l'équation, une solution u vérifie

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}-\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,$$

et l'erreur de troncature est donc (en notant $u_j^n=u(t_n,x_j)$)

$$\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^n}{\Delta t}+\frac{5}{6}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n}{\Delta t}-\nu\frac{(\delta^2 u)_j^{n+1}+(\delta^2 u)_j^n}{2(\Delta x)^2}=$$

$$\mathcal{O}\left((\Delta t)^2+(\Delta x)^4\right).$$

2 Formulation variationnelle

1. La matrice σ est positive si et seulement si sa partie symétrique σ^s l'est. Or, une matrice symétrique d'ordre 2 est positive si et seulement si sa trace et son déterminant son positifs. On a

$$tr(\sigma^s)=\sigma_{11}+\sigma_{22}\geq 0\quad\text{et}\quad det(\sigma^s)=\sigma_{11}\sigma_{22}-\frac{1}{4}(\sigma_{12}+\sigma_{21})^2\geq 0$$

par hypothèse, donc σ est positive.

2. Soit le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{ll} -d_1\Delta u_1 + \sigma_{11}u_1 = f + \sigma_{12}u_2 & \text{dans } \Omega, \\ -d_2\Delta u_2 + \sigma_{22}u_2 = \sigma_{21}u_1 & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{1}$$

Pour obtenir une formulation variationnelle de (1) on multiplie la première équation par une fonction test v_1 et la deuxième équation par v_2, où v_1 et v_2 s'annulent sur le bord $\partial\Omega$, on intègre par parties et on somme. On obtient

$$d_1 \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + d_2 \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, dx + \int_\Omega \sigma u \cdot v \, dx = \int_\Omega f v_1 \, dx, \tag{2}$$

où u et v sont les vecteurs de coordonnées (u_1, u_2) et (v_1, v_2) respectivement. Pour que tous les termes dans (2) aient un sens et pour vérifier la conditions aux limites de Dirichlet on choisit $H_0^1(\Omega)^2$ comme espace de Hilbert. Finalement, la formulation variationnelle proposée est :

trouver $u \in H_0^1(\Omega)^2$ tel que (2) ait lieu pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^2$.

On vérifie maintenant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 3.3.1. On définit une forme linéaire

$$L(v) = \int_\Omega f v_1 \, dx$$

et une forme bilinéaire

$$a(u, v) = d_1 \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + d_2 \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, dx + \int_\Omega \sigma u \cdot v \, dx$$

qui sont clairement continues par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer les intégrales. Vérifions maintenant la coercivité de la forme bilinéaire. On a

$$a(v, v) = d_1 \int_\Omega |\nabla v_1|^2 dx + d_2 \int_\Omega |\nabla v_2|^2 dx + \int_\Omega \sigma v \cdot v \, dx \geq \min(d_1, d_2) \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

car σ est une matrice positive. D'autre part, grâce à l'inégalité de Poincaré (Ω est borné), il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^2$,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq C \|v\|^2_{H^1(\Omega)^2},$$

et donc $a(v, v)$ est bien coercive sur $H_0^1(\Omega)^2$. Par conséquent il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)^2$ de la formulation variationnelle.

Vérifions maintenant que cette solution de la formulation variationnelle est bien une solution du système (1). Pour cela on admet que $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$. On utilise la formule de Green (4.22) qui implique que (2) est équivalent à

$$\int_\Omega (-d_1\Delta u_1 + \sigma_{11}u_1 - \sigma_{12}u_2 - f)\, v_1 \, dx + \int_\Omega (-d_2\Delta u_2 + \sigma_{22}u_2 - \sigma_{21}u_1)\, v_2 \, dx = 0.$$

Comme v_1 et v_2 sont deux fonctions quelconques et indépendantes dans $H_0^1(\Omega)$, on en déduit par application du Corollaire 4.2.2 que

$$-d_1\Delta u_1 + \sigma_{11}u_1 - \sigma_{12}u_2 - f = 0 \quad \text{et} \quad - d_2\Delta u_2 + \sigma_{22}u_2 - \sigma_{21}u_1 = 0$$

comme fonctions de $L^2(\Omega)$, ce qui implique que ces égalités ont lieu presque partout dans Ω. Par ailleurs, comme $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$, le théorème de trace 4.3.13 (ou son corollaire 4.3.16) affirme que, sur le bord $\partial\Omega$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$ en tant que fonctions de $L^2(\partial\Omega)$, ce qui implique que les conditions aux limites de Dirichlet ont lieu presque partout dans $\partial\Omega$. On a donc bien retrouvé le système (1) au sens "presque partout".

3. On rappelle que $u = u^+ + u^-$ avec $u^- = \min(0, u)$ et $u^+ = \max(0, u)$ et que, si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $u^+, u^- \in H_0^1(\Omega)$ (voir le Lemme 5.2.23). On réécrit (1) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{lll} -d_1\Delta u_1 + \sigma_{11}u_1 - \sigma_{12}u_2^- = f + \sigma_{12}u_2^+ & \text{dans } \Omega, \\ -d_2\Delta u_2 + \sigma_{22}u_2 - \sigma_{21}u_1^- = \sigma_{21}u_1^+ & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3}$$

On multiplie la première équation de (3) par u_1^- et la deuxième par u_2^-. Après intégration par parties on a

$$d_1 \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_1^- \, dx + \int_\Omega \left(\sigma_{11}u_1u_1^- - \sigma_{12}u_2^-u_1^-\right) dx = \int_\Omega \left(f + \sigma_{12}u_2^+\right) u_1^- \, dx,$$

et

$$d_2 \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla u_2^- \, dx + \int_\Omega \left(\sigma_{22}u_2u_2^- - \sigma_{21}u_1^-u_2^-\right) dx = \int_\Omega \sigma_{21}u_1^+u_2^- \, dx.$$

Le Lemme 5.2.23 nous dit que $\nabla u^- = 1_{u<0}\nabla u$, ce qui permet de simplifier en

$$d_1 \int_\Omega |\nabla u_1^-|^2 dx + \int_\Omega \left(\sigma_{11}|u_1^-|^2 - \sigma_{12}u_2^-u_1^-\right) dx = \int_\Omega \left(f + \sigma_{12}u_2^+\right) u_1^- \, dx,$$

et

$$d_2 \int_\Omega |\nabla u_2^-|^2 dx + \int_\Omega \left(\sigma_{22}|u_2^-|^2 - \sigma_{21}u_1^-u_2^-\right) dx = \int_\Omega \sigma_{21}u_1^+u_2^- \, dx.$$

En sommant il vient

$$a(u^-, u^-) = \int_\Omega \left(f + \sigma_{12}u_2^+\right) u_1^- \, dx + \int_\Omega \sigma_{21}u_1^+u_2^- \, dx. \tag{4}$$

Or, le terme de gauche dans (4) est positif (puisque a est coercive) tandis que celui de droite est négatif à cause de l'hypothèse $f \geq 0$. Par conséquent, les deux termes sont nuls et la coercivité implique que $u^- = 0$, c'est-à-dire que $u_1 \geq 0$ et $u_2 \geq 0$ presque partout dans Ω.