Ecole Polytechnique, Promotion 2002
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 27 avril 2004

Corrigé proposé par G. Allaire

1 Différences finies

1. D'après le cours on sait que

$$u(t,x-\Delta x)-2u(t,x)+u(t,x+\Delta x) = (\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+\frac{(\Delta x)^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t,x)+\mathcal{O}\Big((\Delta x)^6\Big).$$

Par conséquent, on a

$$\frac{(\delta^2\sigma)_j^n}{(\Delta x)^2} = \frac{\left(\delta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{12}\left(\delta^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + \mathcal{O}\Big((\Delta x)^2\Big)$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_n,x_j) + \mathcal{O}\Big((\Delta x)^2\Big).$$

De même on a

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n,x_j) + \mathcal{O}\Big((\Delta t)^2\Big),$$

donc le schéma est consistant (et même d'ordre 2 au moins). Si on élimine les σ_j^n on obtient

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \nu\frac{u_{j+2}^n-4u_{j+1}^n+6u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n}{(\Delta x)^4} = 0.$$

2. Pour étudier la stabilité L^2 du schéma on utilise l'analyse de Fourier. Avec les notations du polycopié, pour $k\in\mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\hat{u}^n(k)$ de la solution du schéma vérifie

$$\hat{u}^{n+1}(k)-2\hat{u}^n(k)+\hat{u}^{n-1}(k)+\nu\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^4}\hat{u}^n(k)\left(6-8\cos(2\pi k\Delta x)+2\cos(4\pi k\Delta x)\right)=0.$$

En notant $\xi=\pi k\Delta x$ et $\beta=16\nu\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^4}$, on obtient après simplification

$$\hat{u}^{n+1}(k)-2\hat{u}^n(k)+\hat{u}^{n-1}(k)+\beta(\sin\xi)^4\hat{u}^n(k)=0,$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\hat{U}^{n+1}(k) = \begin{pmatrix}\hat{u}^{n+1}(k)\\ \hat{u}^n(k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-\beta(\sin\xi)^4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\hat{U}^n(k) = A(k)\hat{U}^n(k).$$

Les valeurs propres de la matrice $A(k)$ sont les racines du polynôme du deuxième degré

$$\lambda^2 - \left(2 - \beta(\sin\xi)^4\right)\lambda + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = \beta(\sin\xi)^4\left(\beta(\sin\xi)^4 - 4\right).$$

Si $\Delta > 0$, alors les deux racines λ_1 et λ_2 sont réelles, de produit égal à 1. L'une des deux est forcément strictement plus grande que 1 en valeur absolue, et $\|A(k)^n\|_2$ croît sans borne avec n : le schéma est donc instable. Si $\Delta \leq 0$, alors les deux racines λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées de module 1, donc le rayon spectral de $A(k)$ est égal à 1 : la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann est vérifiée pour ce mode k.

Comme $\beta > 0$, la condition $\Delta \leq 0$ est équivalente à $\beta(\sin\xi)^4 \leq 4$. Si on a

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\nu}},$$

on en déduit $\Delta \leq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si au contraire on a

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} > \frac{1}{2\sqrt{\nu}},$$

un choix judicieux de k (tel que $\sin\xi \approx 1$) conduit à $\Delta > 0$, et le schéma est instable.

3. Pour le schéma implicite, le même type de calcul conduit à

$$\hat{u}^{n+1}(k) - 2\hat{u}^n(k) + \hat{u}^{n-1}(k) + \beta(\sin\xi)^4\hat{u}^{n+1}(k) = 0,$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\hat{U}^{n+1}(k) = \begin{pmatrix} \hat{u}^{n+1}(k) \\ \hat{u}^n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\beta(\sin\xi)^4} & \frac{-1}{1+\beta(\sin\xi)^4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{U}^n(k) = A(k)\hat{U}^n(k).$$

Les valeurs propres de la matrice $A(k)$ sont les racines du polynôme du deuxième degré

$$\lambda^2 - \frac{2}{1+\beta(\sin\xi)^4}\lambda + \frac{1}{1+\beta(\sin\xi)^4} = 0,$$

dont le discriminant est

$$\Delta = \frac{-4\beta(\sin\xi)^4}{(1+\beta(\sin\xi)^4)^2} \leq 0.$$

Donc $\rho(A(k)) = 1$ et le schéma implicite vérifie la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann.

2 Formulation variationnelle

1. La formulation variationnelle est : trouver $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a_1(u_1, v) = L(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

avec

$$a_1(u_1, v) = \int_\Omega (\nabla u_1 + bu_1) \cdot (\nabla v + bv)\, dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_\Omega f v\, dx.$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution on applique le théorème de Lax-Milgram dont il faut vérifier les hypothèses. Il est clair que L est linéaire continue et a_1 bilinéaire continue sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme usuelle de $H^1(\Omega)$. Vérifions la coercivité de a_1

$$a_1(v, v) = \int_\Omega |\nabla v + bv|^2 dx = \int_\Omega \Big(|\nabla v|^2 + |b|^2 v^2 + 2v\, b \cdot \nabla v\Big)\, dx.$$

Or, puisque $\mathrm{div} b = 0$,

$$\int_\Omega 2v\, b \cdot \nabla v dx = \int_\Omega b \cdot \nabla(v^2) dx = -\int_\Omega v^2 \mathrm{div} b\, dx = 0.$$

Donc, grâce à l'inégalité de Poincaré, il exite $C > 0$

$$a_1(v, v) = \int_\Omega \Big(|\nabla v|^2 + |b|^2 v^2\Big)\, dx \geq \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq C \|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

ce qui prouve la coercivité de a_1.

2. La deuxième formulation variationnelle est : trouver $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a_2(u_2, v) = L(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

avec

$$a_2(u_2, v) = \int_\Omega (\nabla u_2 + bu_2) \cdot \nabla v\, dx.$$

Encore une fois on démontre l'existence et l'unicité de la solution en appliquant le théorème de Lax-Milgram. La seule hypothèse délicate à vérifier est la coercivité de a_2

$$a_2(v, v) = \int_\Omega (\nabla v + bv) \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega \Big(|\nabla v|^2 + v\, b \cdot \nabla v\Big)\, dx = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq C \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

grâce à l'inégalité de Poincaré.

3. On suppose u_1 et u_2 régulières. Une intégration par parties dans a_1 donne

$$a_1(u_1, v) = \int_\Omega (-\Delta u_1 - \mathrm{div}(bu_1)) v\, dx + \int_\Omega (\nabla u_1 + bu_1) \cdot bv\, dx.$$

Comme $\mathrm{div} b = 0$ on en déduit

$$a_1(u_1, v) = \int_\Omega (-\Delta u_1 + |b|^2 u_1) v\, dx.$$

Par conséquent u_1 est solution faible du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + |b|^2 u_1 = f & \text{dans } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Un calcul similaire (mais plus simple) montre que u_2 est solution faible du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u_2 - b \cdot \nabla u_2 = f & \text{dans } \Omega \\ u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est clair que seul u_2 vérifie un problème de convection-diffusion.

4. Désormais $\Omega = (0,1)$ et $b(x) \equiv b \neq 0$. On applique la méthode des éléments finis P_1. On note $(\phi_j)_{1\le j\le n}$ la base des fonctions "chapeaux" qui valent 1 au noeud $x_j = jh = j/(n+1)$ du maillage et 0 sur les autres noeuds. Au vu des problèmes aux limites, la première matrice de rigidité est

$$\mathcal{K}_1 = \left(\int_0^1 (\phi_i' \phi_j' + b^2 \phi_i \phi_j) dx \right)_{1\le i,j\le n}$$

qui par un calcul standard (voir le polycopié) vaut

$$\mathcal{K}_1 = h^{-1} \begin{pmatrix} 2+2b^2h^2/3 & -1+b^2h^2/6 & & & 0 \\ -1+b^2h^2/6 & 2+2b^2h^2/3 & -1+b^2h^2/6 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1+b^2h^2/6 & 2+2b^2h^2/3 & -1+b^2h^2/6 \\ 0 & & & -1+b^2h^2/6 & 2+2b^2h^2/3 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi utiliser la formule de quadrature, dite des trapèzes, qui permet de simplifier les calculs d'intégrales et donne une approximation d'ordre h de $\mathcal{K}_1$. La deuxième matrice de rigidité est

$$\mathcal{K}_2 = \left(\int_0^1 (\phi_i' \phi_j' - b \phi_j' \phi_i) dx \right)_{1\le i,j\le n}$$

qui vaut

$$\mathcal{K}_2 = h^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1+bh/2 & & & 0 \\ -1-bh/2 & 2 & -1+bh/2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1-bh/2 & 2 & -1+bh/2 \\ 0 & & & -1-bh/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La différence principale entre ces deux matrices est que $\mathcal{K}_2$ n'est pas symétrique (au contraire de $\mathcal{K}_1$) : on ne peut donc pas utiliser de méthode de résolution de système linéaire réservée aux matrices symétriques (comme Choleski ou le gradient conjugué). Par ailleurs, la perturbation apportée au Laplacien est d'un ordre de grandeur plus grande (par rapport à h) dans $\mathcal{K}_2$ que dans $\mathcal{K}_1$, et le signe de b n'a d'influence que sur $\mathcal{K}_2$ et pas sur $\mathcal{K}_1$.