

**CORRIGÉ DU CONTRÔLE CLASSANT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**  
**«Analyse numérique et optimisation»**  
**Mardi 29 Juin 2004**

*Durée : 4 heures*

*Sujet proposé par Stéphane Gaubert et Yvon Maday*

**Corrigé du Problème I: Méthode de synthèse modale avec recouvrement**

PARTIE A : UNE APPROXIMATION ABSTRAITE

**Réponse à la Question 1.** Par intégration par partie et les équivalences classiques on obtient le système

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \lambda m(u, v) ,$$

avec  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$  et  $m(u, v) = \int_{\Omega} uv$ .

**Réponse à la Question 2.** La question de l'existence étant supposée acquise, on voit donc que l'on doit résoudre, sur un domaine régulier, le problème  $-\Delta u = f$  avec  $f = \lambda u$ , et comme  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on en déduit que  $f \in H_0^1(\Omega)$ . De la régularité du domaine et de la régularité elliptique, on tire que la solution  $u$  de  $-\Delta u = f$  est dans  $H^3(\Omega)$ , de quoi on déduit qu'en fait  $f \in H^3(\Omega)$ , ce qui nous amène par récurrence à une régularité de  $u \in H^{2r+1}(\Omega)$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$ .

**Réponse à la Question 3.** En dimension 1 il est évident que  $u$  vérifie l'équation  $-u'' = \lambda u$  au sens fort si et seulement si  $u(x) = A \exp(\sqrt{-\lambda}x) + B \exp(-\sqrt{-\lambda}x)$  (la racine pouvant être complexe). Les seules fonctions non identiquement nulles de ce type s'annulant en 1 et 0 font intervenir des exponentielles complexes, d'où l'on déduit que les valeurs propres sont de la forme  $\lambda_k = k^2\pi^2$ , pour  $k$  entier strictement positif, l'espace propre associé à  $\lambda_k$  étant engendré par la fonction propre  $\sin(k\pi x)$ . En dimension 2 sur le carré  $]0, 1[^2$ , les valeurs propres sont de la forme  $(k^2 + \ell^2)\pi^2$ , avec  $k$  et  $\ell$  entiers strictement positifs, une fonction propre correspondante étant  $\sin(k\pi x) \sin(\ell\pi y)$ . Il suffit maintenant de normaliser ces vecteurs dans  $L^2$ .

**Réponse à la Question 4.** C'est une question de cours :

$$\lambda_1 = \inf_{v \neq 0} \frac{a(v, v)}{m(v, v)} .$$

**Réponse à la Question 5.** Choissant une base de  $X_{\delta}$ , que l'on suppose de dimension  $N$ , le problème variationnel revient à un système matriciel du type : trouver  $U \in \mathbb{R}^N$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que

$$A_N U = \lambda M_N U \tag{I-A.1}$$

où  $A_M$  (resp.  $M_N$ ) est la matrice de rigidité (resp. de masse) représentant  $a$  (resp.  $m$ ) dans la base de  $X_{\delta}$ . La matrice  $M_N$  étant définie positive, elle est diagonalisable dans une base orthonormée et les valeurs propres  $\mu_i$  correspondantes sont  $> 0$ . On appelle  $\sqrt{M_N}$  la matrice qui dans cette base est diagonale avec sur la diagonale la valeur  $\sqrt{\mu_i}$  à la place de  $\mu_i$ . Il est clair que cette matrice est encore symétrique définie positive, donc inversible. Le problème (I-A.1) qui se pose est donc de trouver  $U \in \mathbb{R}^N$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que

$$[\sqrt{M_N}]^{-1} A_N [\sqrt{M_N}]^{-1} [\sqrt{M_N}] U = \lambda [\sqrt{M_N}] U$$

soit encore de trouver  $W \in \mathbb{R}^N$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que

$$[\sqrt{M_N}]^{-1} A_N [\sqrt{M_N}]^{-1} W = \lambda W .$$

Le caractère symétrique défini positif de la matrice de ce système n'ayant échappé à personne, ceci permet d'affirmer qu'il existe exactement  $N$  valeurs propres, qui sont strictement positives. Les vecteurs propres associés sont orthogonaux entre eux si ils correspondent à des valeurs propres différentes, et ils peuvent être choisis orthogonaux si les valeurs propres sont les mêmes (multiples). Il ne reste plus qu'à multiplier ces vecteurs propres par  $[\sqrt{M_N}]^{-1}$  : on obtient ainsi des vecteurs propres solution de (I-A.1), qui sont deux à

deux orthogonaux pour le produit scalaire  $(U, V) \mapsto UM_N V$  sur  $\mathbb{R}^N$ , correspondant au produit scalaire  $L^2$  pour les fonctions représentées par les vecteurs  $U$  et  $V$ . Il ne reste plus qu'à normaliser les vecteurs ainsi obtenus vis à vis de la matrice de masse  $M_N$  (i.e. en norme  $L^2$ ).

**Réponse à la Question 6.** C'est encore une question de cours

$$\lambda_{1\delta} = a(u_{1\delta}, u_{1\delta}) = \inf_{\substack{v \in X_\delta \\ v \neq 0}} \frac{a(v, v)}{m(v, v)} .$$

L'espace des fonctions où l'on prend l'infimum étant plus petit, on en déduit que cette valeur propre discrète est plus grande que la valeur propre exacte.

**Réponse à la Question 7.** On a donc  $m(v_\delta, v_\delta) = 1$  et ainsi

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) = a(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1) + 2a(u_1, v_\delta - u_1)$$

puis en utilisant que  $u_1$  est valeur propre que

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) = a(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1) + 2\lambda_1 m(u_1, v_\delta - u_1)$$

on développe alors

$$2m(u_1, v_\delta - u_1) = 2m(u_1, v_\delta) - 2 = 2m(u_1, v_\delta) - m(u_1, u_1) - m(v_\delta, v_\delta)$$

soit effectivement

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) = a(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1) - \lambda_1 m(v_\delta - u_1, v_\delta - u_1) .$$

Bien choisir  $v_\delta$ , signifie que l'on prend  $v_\delta = \frac{\tilde{v}_\delta}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}}$  où  $\tilde{v}_\delta$  est la projection  $H^1$  de  $u_1$  :

$$\tilde{v}_\delta = \arg \min_{w_\delta \in X_\delta} \|u_1 - w_\delta\|_{H^1(\Omega)} .$$

Estimons maintenant  $\|\tilde{v}\|_{L^2}$ , et montrons en particulier que  $\|\tilde{v}\|_{L^2} \neq 0$ , de sorte que  $v_\delta$  est bien défini, lorsque

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon_\delta = 0$$

où  $\varepsilon_\delta = \inf_{w_\delta \in X_\delta} \|u_1 - w_\delta\|_{H^1(\Omega)}$  (sinon, l'inégalité demandée est triviale).

Par inégalité triangulaire, on obtient tout d'abord que

$$|1 - \|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}| = \left| \|u_1\|_{L^2} - \|\tilde{v}_\delta\|_{L^2} \right| \leq \|u_1 - \tilde{v}_\delta\|_{L^2} \leq \|u_1 - \tilde{v}_\delta\|_{H^1} = \varepsilon_\delta . \quad (\text{I-A.2})$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_1 - v_\delta\|_{H^1} &= \left\| u_1 - \frac{\tilde{v}_\delta}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}} \right\|_{H^1} \\ &\leq \|u_1 - \tilde{v}_\delta\|_{H^1} + \left\| \tilde{v}_\delta - \frac{\tilde{v}_\delta}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}} \right\|_{H^1} \\ &\leq \|u_1 - \tilde{v}_\delta\|_{H^1} + \|\tilde{v}_\delta\|_{H^1} \left| 1 - \frac{1}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}} \right| \\ &\leq c(\varepsilon_\delta + |1 - \frac{1}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}}|) \end{aligned}$$

On remarque que si  $\varepsilon_\delta$  est assez petit, d'après (I-A.2), la contribution  $|1 - \frac{1}{\|\tilde{v}_\delta\|_{L^2}}| \leq c\varepsilon_\delta$  et donc

$$a(v_\delta, v_\delta) - a(u_1, u_1) \leq c \inf_{w_\delta \in X_\delta} \|u_1 - w_\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 .$$

Il suffit maintenant d'appliquer le quotient de Rayleigh discret pour conclure.

PARTIE B : UNE BASE SPECTRALE

**Réponse à la Question 8.** Si  $v = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{v}_i u_i$  alors  $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{v}_i^2$  et  $\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \hat{v}_i^2$ .

**Réponse à la Question 9.** Il faut évaluer ici la décroissance des  $\hat{v}_i$ , on part de leur définition

$$\hat{v}_i = \int_{\Omega} v u_i dx$$

et on utilise le fait que les  $u_i$  sont des vecteurs propres

$$\hat{v}_i = \int_{\Omega} v \frac{1}{\lambda_i} (-\Delta u_i) dx = \frac{1}{\lambda_i} \int_{\Omega} (-\Delta v) u_i dx = -\frac{1}{\lambda_i} \widehat{\Delta v}_i$$

où  $\widehat{\Delta v}_i$  représente la composante de  $\Delta v$  dans le développement

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{\Delta v}_i u_i .$$

On remarque à ce stade que

$$\|\Delta v\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i \hat{v}_i)^2 .$$

On n'a plus qu'à écrire

$$\begin{aligned} \inf_{w_n = \sum_{i=1}^n \hat{w}_i u_i} \|v - w_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|v - \sum_{i=1}^n \hat{v}_i u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \hat{v}_i u_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} (\hat{v}_i)^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2} (\hat{v}_i)^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} (\lambda_i \hat{v}_i)^2 , \end{aligned}$$

cette dernière inégalité découlant de la croissance des valeurs propres, et l'on conclut en notant que

$$\inf_{w_n = \sum_{i=1}^n \hat{w}_i u_i} \|v - w_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i \hat{v}_i)^2 = \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \|\Delta v\|_{L^2}^2 .$$

En procédant de même pour la norme  $H^1$  on obtient

$$\inf_{w_n = \sum_{i=1}^n \hat{w}_i u_i} \|v - w_n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\Delta v\|_{L^2}^2 .$$

**Réponse à la Question 10.** En réitérant l'utilisation de l'égalité  $u_i = \frac{\Delta u_i}{\lambda_i}$  on obtient

$$\hat{v}_i = \frac{(-1)^p}{\lambda_i^p} \widehat{\Delta^p v}_i$$

et l'estimation demandée en découle immédiatement.

**Réponse à la Question 11.** La formulation variationnelle demandée est : trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v .$$

La discrétisation sur  $Y_n$  est : trouver  $u^n \in Y_n$  telle que

$$\forall v \in Y_n, \quad \int_{\Omega} \nabla u^n \nabla v = \int_{\Omega} f v .$$

On sait qu'il existe une solution unique à ce problème et qu'elle vérifie l'estimation

$$\|u - u^n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{v \in Y_n} \|u - v\|_{H^1(\Omega)}$$

et d'après la question précédente

$$\|u - u^n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \|\Delta v\|_{L^2} = c \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \|f\|_{L^2} .$$

Pour avoir une convergence plus rapide, on souhaite utiliser les résultats de la question 10). La régularité est donc à demander sur  $(\Delta)^p f$ , ce qui donne

$$\|u - u^n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \frac{1}{\lambda_{n+1}^{p+1}} \|(\Delta)^{p+1} v\|_{H^1} = c \frac{1}{\lambda_{n+1}^{p+1}} \|(\Delta)^p f\|_{H^1} .$$

#### PARTIE C : UNE DISCRÉTISATION DE TYPE BASE RÉDUITE

**Réponse à la Question 12.** Pour toute fonction  $v \in L^2(\Omega^k)$ , notons maintenant  $\tilde{v}$  la fonction obtenue en prolongeant  $v$  par 0 sur  $\Omega \setminus \Omega^k$ . Il est tout d'abord évident que  $\tilde{v} \in L^2(\Omega)$ . Lorsque  $v \in H_0^1(\Omega^k)$ , pour tout  $w \in H^1(\Omega)$ , on a par intégration par partie

$$\int_{\Omega} \tilde{v} \frac{\partial w}{\partial x} = \int_{\Omega^k} v \frac{\partial w}{\partial x} = - \int_{\Omega^k} \frac{\partial v}{\partial x} w = - \int_{\Omega} \widetilde{\frac{\partial v}{\partial x}} w .$$

On note qu'aucun terme de bord n'est apparu dans cette intégration par partie puisque  $v$  est nul sur  $\partial\Omega^k$ . Cela montre l'existence de la dérivée au sens faible

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \widetilde{\frac{\partial v}{\partial x}} \in L^2(\Omega) .$$

On procède de même pour  $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$  ce qui montre que  $\tilde{v}$  est bien dans  $H^1(\Omega)$ . Qu'il soit dans  $H_0^1(\Omega)$  découle du fait qu'il est nul sur  $\partial\Omega$ .

**Réponse à la Question 13.** Avec seulement 2 rectangles, il y a clairement un problème au coin concave  $c_0$ . En effet, si une telle partition de l'unité existait, sa trace sur le bord de chacun des sous-domaines serait aussi régulière. Or, au voisinage du coin  $c_0$ ,  $\chi^2$  doit valoir 1 sur l'intersection de la frontière de  $\Omega$  avec la frontière de  $\Omega^2$  et 0 sur la frontière de  $\Omega^2$  dans  $\Omega$ .

**Réponse à la Question 14.** La fonction  $\Phi^k$  est de classe  $C^\infty$  en dehors des coins, comme produit de fonctions  $C^\infty$ . Par ailleurs, on note que

$$\Delta \Phi^k = \Delta[(\chi^k)\Phi] = [\Delta\Phi]\chi^k + 2\nabla\chi^k\nabla\Phi + \Phi[\Delta\chi^k]$$

puis, au voisinage de chaque coin,  $\nabla\chi^k$  (et donc  $\Delta\chi^k$ ) est identiquement nulle. Il reste à remarquer que  $-\Delta\Phi = \lambda_1\Phi$ , pour conclure à la régularité, au moins  $H^1$  de  $\Delta\Phi^k$ . Regardons maintenant la valeur au bord de  $\Delta\Phi^k$ . On reprend la même décomposition et on remarque que  $[-\Delta\Phi]\chi^k = [\lambda_1\Phi]\chi^k$  est nulle au bord car  $\Phi \in H_0^1(\Omega)$  et  $\chi^k$  est nulle sur  $\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega$ . Le même argument montre que  $\Phi[\Delta\chi^k]$  est nulle au bord, car  $\Delta\chi^k$  est nul sur  $\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega$ . Pour voir ce dernier point, notons en effet  $\Xi^k$  l'intérieur de  $\Omega \setminus \Omega^k$ . La fonction  $\chi^k$  s'annule en dehors de  $\Omega^k$ , et en particulier sur  $\Xi^k$ . Comme  $\Xi^k$  est ouvert, on déduit que toutes les dérivées de  $\chi^k$  s'annulent sur  $\Xi^k$ . Comme  $\chi^k$  est régulière, ces dérivées s'annulent sur l'adhérence de  $\Xi^k$ , donc en particulier sur  $\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega$ . Ainsi,  $\Delta\chi^k$  est nul sur  $\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega$ . La nullité au bord de  $\nabla\chi^k\nabla\Phi$  est un peu plus subtile. Observons un point du bord de  $\Omega^k$ . Considérons d'abord le cas où ce point est aussi sur  $\partial\Omega$  auquel cas la fonction  $\Phi$  est nulle. La trace de sa dérivée tangentielle est de ce fait également nulle, et le gradient  $\nabla\Phi$  est donc normal au morceau de frontière contenant le point considéré. L'hypothèse faite sur  $\chi^k$  d'avoir une dérivée normale nulle permet ainsi de conclure à la nullité de ce produit. Considérons enfin un point de  $\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega$  : on a déjà montré que toutes les dérivées de  $\chi^k$ , et en particulier  $\nabla\chi^k$ , sont nulles en ce point. La démonstration générale ( $p > 1$ ) suit le même schéma. En effet  $\Delta^p\Phi^k$  est la somme de  $[\Delta^p\Phi]\chi^k$  et d'autres termes qui font apparaître des dérivées de  $\chi^k$ . Ces derniers s'annulent aux voisinages des sommets et donc les seules irrégularités de  $\Delta^p\Phi^k$ , aux sommets, pourraient venir de  $[\Delta^p\Phi]\chi^k = [\lambda_1]^p\Phi\chi^k$  qui est  $H^1$ . L'appartenance à  $H_0^1$  vient de l'utilisation de l'hypothèse de la nullité de la dérivée normale à tous les ordres.

**Réponse à la Question 15.** La majoration demandée découle de la question 10) et de la régularité de  $(\Delta)^p \Phi^k$  que l'on vient d'établir.

**Réponse à la Question 16.** Soit  $v_n^k$  la meilleure approximation de  $\Phi^k$  évoquée dans la question précédente. De l'égalité

$$u_1 = \Phi = \Phi^1 + \Phi^2 + \Phi^3$$

on déduit qu'une bonne approximation de  $u_1$  est donnée par  $v_n^1 + v_n^2 + v_n^3$  et qu'ainsi

$$\inf_{w_n \in X_n} \|u_1 - w_n\|_{H^1} \leq c \max_k \left( \frac{1}{\lambda_{n+1}^k} \right)^p.$$

On utilise maintenant la majoration abstraite énoncée à l'issue de la question 7) pour déduire que la solution propre discrète (notée  $u_{1,n}$ ) sur l'espace  $X_n$  vérifie également

$$\|u_1 - u_{1,n}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \max_k \left( \frac{1}{\lambda_{n+1}^k} \right)^p$$

**Réponse à la Question 17.** Ce que l'on a fait pour la première fonction propre peut également être fait pour la seconde et toutes les suivantes. La seule distinction est que

$$\|(\Delta)^p [u_J \chi^k]\|_{H^1} \leq c(\lambda_J)^p$$

avec une constante  $c$  ne dépendant que de  $p$  et de la partition de l'unité (mais pas de  $J$ ). Ceci conduit à la majoration

$$\|u_J - u_{J,n}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \max_k \left( \frac{\lambda_J}{\lambda_{n+1}^k} \right)^p.$$

**Réponse à la Question 18.** Les matrices de masse et de rigidité sont pleines, bien sûr symétriques, elles ont une structure bloc  $3 \times 3$  correspondant aux 3 sous-domaines. Les bases locales (à chaque sous-domaine) étant orthonormées, on en déduit que les blocs diagonaux sont eux même diagonaux (égaux d'ailleurs à l'identité pour la matrice de masse et faisant apparaître les valeurs propres  $\lambda_i^k$  dans la matrice de rigidité.)

#### PARTIE D : UNE DISCRÉTISATION DE TYPE ÉLÉMENT FINI

**Réponse à la Question 19.** Une méthode de type éléments finis simple va reposer sur des éléments de type Lagrange sur des triangles (le cadre étant  $H^1$ ) de degré 1 (à cause de la singularité des solutions propres). Par contre on peut se permettre d'utiliser un maillage raffiné dans les coins pour mieux s'adapter aux singularités éventuelle de la solution. L'erreur est alors au moins en  $\mathcal{O}(h^{2/3})$  où  $h$  est la taille du maillage puisque l'on peut s'attendre à voir la première singularité en  $1 + \frac{\pi}{\omega}$  ou  $\omega$  est le plus grand angle du domaine (ici  $\frac{3\pi}{2}$ ). En fait, à cause de la forme spéciale, cette première singularité n'est pas apparente et la convergence est en fait en  $\mathcal{O}(h)$ . Néanmoins, on est loin de la convergence de la méthode en base réduite précédente qui utilise des fonctions ad hoc, qui approchent bien mieux les singularités (on en effet obtenu une convergence en  $\mathcal{O}(1/\lambda_{n+1}^p)$ , pour tout  $p$ , et donc une décroissance plus rapide que l'inverse de toute puissance de  $n$ , à comparer avec  $\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(1/n^2)$ ). Le nombre de degrés de libertés pour une approximation en éléments finis est donc bien supérieur pour obtenir une approximation de la même précision. Par contre la structure des matrices en présence dans l'approximation en éléments finis est beaucoup plus agréable puisque, comme d'habitude, elles sont creuses.

**Réponse à la Question 20.** Si les vecteurs propres locaux sont évalués par un calcul en éléments finis on remplace ainsi les  $u_i^k$  par des  $(u_i^k)_h$  qui vérifient

$$\|u_i^k - (u_i^k)_h\|_{H^1} \leq ch^{2/3}$$

au moins. Cette erreur est à ajouter à l'approximation en base réduite et l'on obtient, à la place de la solution  $u_{1,n}$  de la question 16) une solution  $u_{1,n,h}$  qui vérifie

$$\|u_1 - u_{1,n,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left( \left( \frac{1}{\lambda_{n+1}^k} \right)^p + h^{2/3} \right)$$

L'intérêt qui subsiste de cette approche est que la valeur de  $h$  que l'on utilise alors sur chacun des sous-domaines peut être plus petite que celle qui est utilisée dans la question 19) se rapportant au domaine entier.

## Corrigé du Problème II: Optimisation de grands systèmes

### PARTIE A : COUPLAGE PAR LES CONTRAINTES ET DÉCOMPOSITION PAR LES PRIX

**Réponse à la Question 1.** Notons  $U_{\text{ad}} = U \cap F^{-1}(0)$  l'ensemble des solutions admissibles. Comme les  $U_i$  sont fermés,  $U = U_1 \times \dots \times U_n$  est fermé. Comme  $F$  est continue,  $F^{-1}(0)$  est fermé. L'ensemble  $U_{\text{ad}}$  est donc un fermé d'un espace vectoriel de dimension finie. Par hypothèse,  $U_{\text{ad}}$  est non-vide. L'application  $J$  qui est continue et infinie à l'infinie sur  $U_{\text{ad}}$ , atteint donc son minimum. Enfin, si les applications  $J_i$  sont strictement convexes, l'application  $J$  est strictement convexe, et si en outre les applications  $H_i$  sont affines et les ensembles  $U_i$  sont convexes, l'ensemble admissible est convexe : le point de minimum est alors unique.

**Réponse à la Question 2.** Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) + p \cdot F(\bar{u}) &\leq J(\bar{u}) + \bar{p} \cdot F(\bar{u}) \quad \forall p \in \mathbb{R}^m \\ (p - \bar{p}) \cdot F(\bar{u}) &\leq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^m \\ q \cdot F(\bar{u}) &\leq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^m \\ q \cdot F(\bar{u}) &\leq 0 \text{ et } -q \cdot F(\bar{u}) \leq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^m \\ q \cdot F(\bar{u}) &= 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^m \\ F(\bar{u}) &= 0 \end{aligned}$$

donc la première inégalité de point selle est équivalente à  $F(\bar{u}) = 0$ . La seconde inégalité de point selle exprime le fait que la fonction  $u \mapsto \mathcal{L}(u, \bar{p})$  est minimale en  $u = \bar{u}$ . Or  $\mathcal{L}(u, \bar{p}) = p \cdot d + f(u)$ , où  $f(u)$  est de la forme  $f_1(u_1) + \dots + f_n(u_n)$ , avec  $f_i(u_i) = J_i(u_i) - \bar{p} \cdot H_i(u_i)$ . L'équivalence demandée résulte du fait que  $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$  est point de minimum de  $f_1(u_1) + \dots + f_n(u_n)$  sur  $U_1 \times \dots \times U_n$  si et seulement si chaque  $\bar{u}_i$  est point de minimum de  $f_i$  sur  $U_i$  (le "si" est immédiat ; pour prouver le "seulement si", considérer  $u$  tel que  $u_j = \bar{u}_j$  pour  $j \neq i$ ).

Enfin, en utilisant la seconde inégalité de point selle et  $F(\bar{u}) = 0$ , on a  $\inf_{u \in U, F(u)=0} J(u) \geq \inf_{u \in U} J(u) + \bar{p} \cdot F(u) = J(\bar{u}) + \bar{p} \cdot F(\bar{u}) = J(\bar{u})$ , ce qui montre que  $\bar{u}$  est point de minimum du problème initial.

**Réponse à la Question 3.** Les applications  $J_i$  sont fortement convexes, car les matrices  $A_i$  sont symétriques définies positives. D'après la Question 1, le point de minimum  $\bar{u}$  existe et est unique. Pour le calculer, profitons de la question précédente : il suffit de trouver  $(\bar{u}, \bar{p})$  tel que  $\bar{u} \in \bar{U}(\bar{p})$  et  $F(\bar{u}) = 0$ . Or  $\bar{u} \in \bar{U}(\bar{p})$  si et seulement si pour tout  $i$ ,  $\bar{u}_i$  est point de minimum de la fonction  $f_i(u_i) = \frac{1}{2}u_i \cdot A_i u_i - p \cdot B_i u_i$ . Comme  $J_i$ , et donc  $f_i$ , est convexe et différentiable,  $\bar{u}_i$  est point de minimum de  $f_i$  sur  $V_i$  si et seulement si  $f'_i(\bar{u}_i) = A_i \bar{u}_i - B_i^* p = 0$ , soit  $\bar{u}_i = A_i^{-1} B_i^* p$ . Il reste à satisfaire  $F(\bar{u}) = 0$ . En substituant dans  $F(\bar{u}) = 0$ , on trouve  $C \bar{p} = d$ , avec  $C = B_1 A_1^{-1} B_1^* + \dots + B_n A_n^{-1} B_n^*$ . Si  $C$  est inversible, on peut prendre  $\bar{p} = C^{-1} d$ , ce qui montre que la solution du problème est  $\bar{u}_i = A_i^{-1} B_i^* C^{-1} d$ . Un simple calcul donne enfin la valeur  $J(\bar{u}) = \frac{1}{2} d \cdot C^{-1} d$ .

Si  $C$  n'est pas inversible, on sait cependant a priori que l'équation  $C \bar{p} = d$  a une solution. En effet, le problème (II.1) ayant une solution, on peut déduire du théorème de Kuhn et Tucker (voir le corrigé de la Question 4 pour plus de détails sur son application) qu'il existe un multiplicateur  $p \in \mathbb{R}^m$  tel que  $J'(\bar{u}) + p \cdot F'(\bar{u}) = 0$ , ce qui est équivalent à  $A_i \bar{u}_i - B_i^* p = 0$ , pour tout  $i$ . Il suffit donc de refaire le calcul qui précède en prenant pour  $\bar{p}$  une solution quelconque de  $C \bar{p} = d$ .

Notons enfin (cela n'était pas demandé) que l'on peut interpréter géométriquement l'hypothèse d'inversibilité de  $C$ , car  $\text{im } C = \text{im } B_1 + \dots + \text{im } B_n$  (nous écrivons "im" pour "image", en identifiant une matrice à l'application linéaire qu'elle représente.) Pour voir cela, notons que  $C = \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^*$ , où  $\mathcal{A}$  est la matrice diagonale par blocs formée à partir des blocs  $A_i$ , et  $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_n)$ . Comme  $\mathcal{B}$  est un diviseur à gauche de  $C$ , on a  $\text{im } C \subset \text{im } \mathcal{B} = \text{im } B_1 + \dots + \text{im } B_n$ . Pour avoir l'autre inclusion, il suffit de montrer que  $\text{im } C^\perp \subset \text{im } \mathcal{B}^\perp$ . Or si  $q \in \text{im } C^\perp$ ,  $q \cdot C q = 0$ , et comme  $q \cdot C q = q \cdot \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^* q = \mathcal{B}^* q \cdot \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^* q$  et  $\mathcal{A}^{-1}$  est définie positive,  $\mathcal{B}^* q = 0$ , soit  $q \in \text{im } \mathcal{B}^\perp$ . Comme  $C$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^m$ ,  $C$  est inversible si et seulement si sont image,  $\text{im } B_1 + \dots + \text{im } B_n$ , coïncide avec  $\mathbb{R}^m$ , c'est-à-dire, si et seulement si tout vecteur de demande de  $\mathbb{R}^m$  est atteignable.

**Réponse à la Question 4.** Notre problème revient à minimiser  $J$  sous les contraintes  $F(u) = 0$  et  $\ell_i - u_i \leq 0$ ,  $u_i - L_i \leq 0$ . Introduisons des multiplicateurs de Lagrange  $q_i \geq 0$  et  $Q_i \geq 0$  afin de dualiser ces dernières contraintes, et formons le nouveau Lagrangien :

$$\mathcal{L}^+(u, p, q, Q) = J(u) + p \cdot F(u) + \sum_{1 \leq i \leq n} q_i(\ell_i - u_i) + Q_i(u_i - L_i) .$$

On sait (Question 1) que l'optimum du problème (II.1) est atteint en un point  $\bar{u}$ . On va appliquer le théorème de Kuhn et Tucker pour conclure qu'il existe  $\bar{p} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{q}, \bar{Q} \in \mathbb{R}_+^n$ , tels que  $(\bar{u}, (\bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}))$  soit point selle du Lagrangien  $\mathcal{L}^+$  sur  $V \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n)$ . (On applique en fait la remarque qui suit le théorème de Kuhn et Tucker, concernant le cas de contraintes d'égalités affine). Vérifions les hypothèses de Kuhn et Tucker : le critère est convexe, continu, dérivable ; les applications définissant les contraintes inégalités sont affines (a fortiori convexes, continues, dérivables) ; et l'application  $F$  définissant les contraintes égalités est affine. Enfin, comme toutes les contraintes sont affines, les contraintes sont automatiquement qualifiées en  $\bar{u}$  (cela résulte de la Remarque 10.2.22). Ces hypothèses étant vérifiées, on a bien

$$\mathcal{L}^+(\bar{u}, p, q, Q) \leq \mathcal{L}^+(\bar{u}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}) \leq \mathcal{L}^+(u, \bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}), \quad \forall u \in V, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}_+^n, Q \in \mathbb{R}_+^n . \quad (\text{II-A.1})$$

Comme  $\bar{u}$  est un point admissible,  $\ell_i - \bar{u}_i \leq 0$ ,  $\bar{u}_i - L_i \leq 0$ , donc

$$\sup_{q, Q \in \mathbb{R}_+^n} \mathcal{L}^+(\bar{u}, p, q, Q) = \mathcal{L}(\bar{u}, p)$$

(le sup est atteint en  $q = Q = 0$ ). Par ailleurs, pour  $u \in U$ , on a  $\bar{q}_i(\ell_i - u_i) \leq 0$  et  $\bar{Q}_i(u_i - L_i) \leq 0$ , donc  $\mathcal{L}^+(u, \bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}) \leq \mathcal{L}(u, \bar{p})$ . Enfin, la condition des écarts complémentaires contenue dans le théorème de Kuhn et Tucker montre que  $\bar{q}_i(\ell_i - \bar{u}_i) = 0$  et  $\bar{Q}_i(\bar{u}_i - L_i) = 0$ , et donc  $\mathcal{L}^+(\bar{u}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{Q}) = \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{p})$ . On déduit ainsi de (II-A.1) que  $(\bar{u}, \bar{p})$  est un point selle de  $\mathcal{L}$  sur  $U$ .

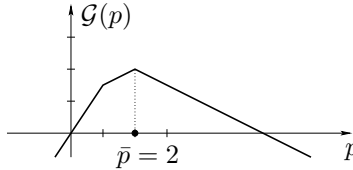
**Réponse à la Question 5.** Si  $u \in \bar{U}(p)$ , on a pour tout  $q \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{G}(p+q) \leq J(u) + (p+q) \cdot F(u) = \mathcal{G}(p) + q \cdot F(u)$ . Donc la fonction  $q \mapsto \mathcal{G}(p+q) - q \cdot F(u)$  est maximale en  $q = 0$ . En dérivant, on trouve  $\mathcal{G}'(p) = F(u)$ .

**Réponse à la Question 6.** On reconnaît un algorithme de type Uzawa. La preuve du Théorème 10.5.9 du cours, relatif à l'algorithme d'Uzawa dans le cas de contraintes inégalités, s'adapte sans difficulté au cadre présent, le seul point étant de remarquer que dans le cas d'une contrainte égalité  $F(u) = 0$ ,  $F$  doit être affine et non pas convexe. La convergence de  $u^k$  vers  $\bar{u}$  sera donc garantie s'il existe un point selle, si  $J$  est fortement convexe, si  $F$  est affine ( $F$  est alors automatiquement Lipschitzienne), et si les  $U_i$  sont des convexes (fermés). Notons également que d'après la question précédente, l'algorithme d'Uzawa coïncide avec l'algorithme de gradient pour maximiser la fonction duale  $\mathcal{G}$ , lorsque celle-ci est différentiable. Le Théorème 10.5.4 relatif à l'algorithme de gradient montre donc que  $p^k$  convergera vers  $\bar{p}$  si la fonction duale  $\mathcal{G}$  est fortement convexe, différentiable, et de dérivée Lipschitzienne.

**Réponse à la Question 7.** La solution optimale est évidemment  $\bar{u}_1 = 1$  et  $\bar{u}_2 = 0.5$  (des deux fournisseurs, le moins cher ne peut livrer que 1, on achète la demande de 0.5 restante à l'autre fournisseur). La fonction duale vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p) &= \inf_{u_1 \in [0,1]} u_1 - pu_1 + \inf_{u_2 \in [0,1]} 2u_2 - pu_2 + 1.5p , \\ &= \min(0, 1 - p) + \min(0, 2 - p) + 1.5p , \end{aligned}$$

soit



L'optimum est  $\bar{p} = 2$ . La dérivée  $\mathcal{G}'(p)$  prend les valeurs  $+0.5$  à gauche de  $\bar{p}$  et  $-0.5$  à droite de  $\bar{p}$  : en utilisant le fait que  $\mathcal{G}'(p^k) = F(u^k)$  en tout point de différentiabilité de  $\mathcal{G}$  (Question 5), on voit aussitôt que l'on aura un comportement oscillant  $p^{2k+1} = p^{2k} + 0.5\epsilon$ ,  $p^{2k+2} = p^{2k+1} - 0.5\epsilon$ , par exemple pour  $p^0 < \bar{p}$  et

$p^0$  proche de  $\bar{p}$ . Cette difficulté est liée à la non-différentiabilité de  $\mathcal{G}$ . Il faudrait prendre un pas  $\epsilon_k$  tendant vers 0, de manière à supprimer l'oscillation, tout en faisant en sorte que  $\sum_k \epsilon_k = +\infty$ . Cependant, on a  $\bar{U}(p) = (1, 0)$  pour  $p < \bar{p}$  et  $p$  proche de  $\bar{p}$ , et  $\bar{U}(p) = (1, 1)$  pour  $p > \bar{p}$  : même même avec une telle suite  $\epsilon_k$  pour laquelle  $p^k$  convergera vers  $\bar{p}$ ,  $u^k$  ne convergera pas vers  $\bar{u}$  (sauf peut-être dans le cas exceptionnel où  $p^k = \bar{p}$  pour un certain  $k$ ).

PARTIE B : PRINCIPE DU PROBLÈME AUXILIAIRE DANS LE CAS D'UN COUPLAGE PAR LE CRITÈRE

**Réponse à la Question 8.** La fonction à minimiser est somme d'une fonction fortement convexe,  $K$ , et d'une fonction convexe,  $u \mapsto (\epsilon T'(u^k) - K'(u^k)) \cdot u + \epsilon S(u)$ . Elle est donc fortement convexe, et elle est évidemment continue. L'ensemble admissible est un convexe, fermé, non-vide, d'un Hilbert. Le minimum est donc atteint en un unique point.

Le problème (II.6) se décompose en  $n$  sous-problèmes indépendants. En effet, la solution du problème de minimisation (II.6) est de la forme  $u = (u_1, \dots, u_n)$ , où chaque  $u_i$  est obtenu comme solution du sous-problème :

$$\inf_{u_i \in U_i} K_i(u_i) + \pi_i(\epsilon T'(u^k) - K'(u^k)) \cdot u_i + \epsilon S_i(u_i) ,$$

où  $\pi_i$  désigne la projection de  $V$  dans  $V_i$  qui à  $(u_1, \dots, u_n)$  associe  $u_i$ .

**Réponse à la Question 9.** L'application que l'on minimise étant convexe et différentiable, et l'ensemble admissible étant convexe, une condition nécessaire et suffisante pour que  $u$  soit un point minimum du problème (II.6) est que l'inéquation d'Euler soit vérifiée, soit en l'occurrence :

$$(K'(u) + \epsilon T'(u^k) - K'(u^k) + \epsilon S'(u)) \cdot (v - u) \geq 0, \quad \forall v \in U . \quad (\text{II-B.2})$$

Si l'optimum est atteint en  $u = u^{k+1} = u^k$ , il vient après simplification et division par  $\epsilon$  :

$$(T'(u^k) + S'(u^k)) \cdot (v - u^k) \geq 0, \quad \forall v \in U .$$

On reconnaît ici l'inéquation d'Euler au point  $u^k$  pour le problème consistant à minimiser la fonction convexe différentiable  $T + S$  sur le convexe  $U$ . Le point  $u^k$  est donc point de minimum pour ce problème.

**Réponse à la Question 10.** La Proposition 10.1.5 du cours montre que l' $\alpha$ -convexité de  $K$  est équivalente à la propriété

$$K(v) \geq K(u) + K'(u) \cdot (v - u) + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2 , \quad \forall u, v \in U .$$

En posant  $v = u^\sharp$ , on obtient aussitôt

$$\phi(u) \geq \frac{\alpha}{2} \|u - u^\sharp\|^2 .$$

**Réponse à la Question 11.** En évaluant l'inéquation d'Euler (II-B.2) en  $u = u^{k+1}$ , il vient

$$(K'(u^{k+1}) + \epsilon T'(u^k) - K'(u^k) + \epsilon S'(u^k)) \cdot (v - u^{k+1}) \geq 0, \quad \forall v \in V . \quad (\text{II-B.3})$$

Comme  $u^\sharp$  est point de minimum de  $T + S$  sur  $U$ , on a aussi :

$$(T'(u^\sharp) + S'(u^\sharp)) \cdot (v - u^\sharp) \geq 0 , \quad \forall v \in V . \quad (\text{II-B.4})$$

En prenant  $v = u^\sharp$  dans (II-B.3) et  $v = u^{k+1}$  dans (II-B.4), en multipliant (II-B.4) par  $\epsilon$ , et en sommant, il vient

$$(K'(u^{k+1}) + \epsilon T'(u^k) - K'(u^k) + \epsilon S'(u^{k+1})) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) + \epsilon (T'(u^\sharp) + S'(u^\sharp)) \cdot (u^{k+1} - u^\sharp) \geq 0$$

soit

$$\begin{aligned} & (K'(u^{k+1}) - K'(u^k)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) + \epsilon (T'(u^k) - T'(u^\sharp)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) \\ & \geq \epsilon (S'(u^{k+1}) - S'(u^\sharp)) \cdot (u^{k+1} - u^\sharp) \geq 0 , \end{aligned}$$

car  $S$  est convexe.



**Réponse à la Question 12.** On a

$$\begin{aligned}
\phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) &= K(u^{k+1}) - K(u^k) + K'(u^{k+1}) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) - K'(u^k) \cdot (u^\sharp - u^k) \\
&\geq K'(u^k) \cdot (u^{k+1} - u^k) + \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + K'(u^{k+1}) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) - K'(u^k) \cdot (u^\sharp - u^k) \\
&= \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + (K'(u^{k+1}) - K'(u^k)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1})
\end{aligned}$$

où l'on a d'abord utilisé l' $\alpha$ -convexité de  $K$ , et simplifié ensuite. En utilisant maintenant l'inégalité (II.8), on déduit que

$$\begin{aligned}
\phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) &\geq \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon(T'(u^\sharp) - T'(u^k)) \cdot (u^\sharp - u^{k+1}) \\
&= \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon(T'(u^\sharp) - T'(u^k)) \cdot (u^\sharp - u^k) + \epsilon(T'(u^\sharp) - T'(u^k)) \cdot (u^k - u^{k+1}) \\
&\geq \frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon a \|u^\sharp - u^k\|^2 - \epsilon \nu \|u^\sharp - u^k\| \|u^k - u^{k+1}\| ,
\end{aligned}$$

en utilisant (II.9), (II.10) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous pouvons minorer le dernier terme par

$$\frac{\alpha}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon a \|u^\sharp - u^k\|^2 - \frac{\epsilon \nu}{2\delta} \|u^\sharp - u^k\|^2 - \frac{\epsilon \nu \delta}{2} \|u^k - u^{k+1}\|^2 ,$$

pour un choix quelconque de  $\delta > 0$ . On a donc

$$\phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) \geq \frac{\alpha - \epsilon \nu \delta}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 + \epsilon \left(a - \frac{\epsilon \nu}{2\delta}\right) \|u^\sharp - u^k\|^2 .$$

On a bien la propriété demandée, à condition que les constantes

$$\beta = \frac{\alpha - \epsilon \nu \delta}{2}, \quad \gamma = \epsilon \left(a - \frac{\nu}{2\delta}\right)$$

soient toutes deux strictement positives, i.e., à condition que  $\delta$  soit choisi tel que  $\delta < \alpha/(\epsilon \nu)$  et  $\delta > \nu/(2a)$ . Dès que  $\nu/(2a) < \alpha/(\epsilon \nu)$ , i.e., dès que  $\epsilon < 2\alpha a/\nu^2$ , un tel choix est possible.

Montrons finalement la convergence de  $u^k$  vers  $u^\sharp$ . Il résulte de (II.11) que  $\phi(u^{k+1}) \leq \phi(u^k)$ . En outre,  $\phi(u^k) \geq 0$ , en vertu de (II.7). Ainsi, la suite  $\phi(u^k)$  qui est décroissante et minorée converge vers une limite  $\bar{\phi}$ . Comme d'après (II.11),  $\phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) \geq \gamma \|u^\sharp - u^k\|^2 \geq 0$ , et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(u^k) - \phi(u^{k+1}) = \bar{\phi} - \bar{\phi} = 0$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^\sharp - u^k\| = 0$ , ce qui achève la preuve.