Devoir de MAP 431: Formulation variationnelle de Petrov-Galerkin

L'objet de ce problème est d'examiner, dans un cas simple monodimensionnel, une formulation variationnelle pour la résolution de problèmes aux limites par méthode d'éléments finis un peu différente de celle introduite dans le cours. Cette formulation est dite de Petrov-Galerkin (par opposition à celle du cours, dite de Galerkin).

Soit V l'espace fonctionnel $H_0^1(]0,1[)$ muni du produit scalaire $(u,v)_V = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ et de la norme correspondante (Ici et dans la suite, $u'(x)$ désigne bien sûr la dérivée $\frac{du}{dx}$). Soient $c > 0$ et $d > 0$ deux paramètres réels fixés (c comme *convection* et d comme *diffusion*). Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

On considère la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_0 \in V \text{ tel que ,} \\ d \displaystyle\int_0^1 u_0'(x)\, v'(x)\, dx \, + \, c \int_0^1 u_0'(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx, \ \ \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{1}$$

Question 0.1.

Montrer que ce problème (1) a une solution unique u_0. Ecrire le problème aux limites dont u_0 est solution. On prendra soin de bien justifier toutes les manipulations effectuées, et de préciser en quel sens mathématique précis u_0 vérifie l'équation différentielle ordinaire et les conditions aux limites correspondantes.

1 Formulation Petrov-Galerkin

On considère le maillage régulier de l'intervalle $[0,1]$ suivant : pour N fixé, on pose $h = \frac{1}{N+1}$ et $x_j = jh$ pour $0 \le j \le N+1$.

On fixe alors la base d'éléments finis suivante. Premièrement, pour $1 \le j \le N$ on introduit les fonctions P_1 usuelles :

$$\phi_j(x) = \phi\Big(\frac{x - x_j}{h}\Big), \tag{2}$$

avec

$$\phi(s) = \begin{cases} 1-|s| & \text{si } |s| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

Deuxièmement, pour $\beta \geq 0$ un paramètre qu'on fixera plus loin, on introduit les fonctions $\psi_{j,\beta}$ définies par

$$\psi_{j,\beta} = \phi\Big(\frac{x-x_j}{h}\Big) + \beta\,\sigma\Big(\frac{x-x_j}{h}\Big), \tag{4}$$

avec

$$\sigma(s) = \begin{cases} 3s(|s|-1) & \text{si } |s| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5}$$

On note alors

$$\begin{aligned} V_1^h & \text{ l'espace engendré par les fonctions } \phi_j, 1 \leq j \leq N \\ V_2^h & \text{ l'espace engendré par les fonctions } \psi_{j,\beta}, 1 \leq j \leq N \end{aligned}$$

La formulation dite *éléments finis de Petrov-Galerkin* du problème (1) s'écrit par définition

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1^h \in V_1^h \text{ tel que}, \\ d\displaystyle\int_0^1 (u_1^h)'(x)\,v'(x)\,dx \;+\; c\int_0^1 (u_1^h)'(x)\,v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx, \quad \forall\; v \in V_2^h. \end{cases} \tag{6}$$

On notera bien la dissymétrie entre les espaces fonctionnels auxquels appartiennent respectivement la solution cherchée u_1^h, et les fonctions-tests v.

En développant $u_1^h = \sum_{i=1}^{N} U_i\,\phi_i(x)$ la solution de (6) (on justifiera dans la Question 1.2 ci-dessous son existence et son unicité), (6) se traduit sous la forme du système linéaire

$$\begin{cases} A\,U_{j-1} \;+\; B\,U_j \;+\; C\,U_{j+1} &=& D_j, \;\; 1 \leq j \leq N \\ U_0 &=& 0 \\ U_{N+1} &=& 0 \end{cases} \tag{7}$$

Question 1.1. Expliciter les coefficients A, B, C, et D_j $(1 \leq j \leq N)$.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les matrices tridiagonales de taille $N \times N$ respectivement définies par

$$\mathcal{A} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\beta & 1-\beta & & & & 0 \\ -1-\beta & 2\beta & 1-\beta & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -1-\beta & 2\beta & 1-\beta \\ 0 & & & & -1-\beta & 2\beta \end{pmatrix}$$

On pose $\mathcal{C} = d\mathcal{A} + c\mathcal{B}$.

Question 1.2. Montrer que pour tout $W \in \mathbf{R}^N$,

$$(W^t)\mathcal{C}W = \left(d + \frac{hc\beta}{2}\right)(W^t)\mathcal{A}W. \tag{8}$$

En déduire que le problème (6) a une et une seule solution, que l'on trouve par résolution du système linéaire $\mathcal{C}U = D$.

2 Une propriété qualitative

On suppose la fonction f strictement positive et on s'intéresse maintenant aux propriétés de positivité des solutions u_0 et u_1^h respectivement de (1) et (6). On suppose désormais $h \leq \dfrac{3d}{c}$.

Question 2.1. Montrer que $u_0 > 0$ dans $]0, 1[$.

Question 2.2. Montrer que $\psi_{j,\beta} > 0$ sur $]x_{j-1}, x_{j+1}[$ pour tout $1 \leq j \leq N$ si et seulement si $\beta \leq \beta_{max}$, où l'on précisera la valeur de la constante β_{max}. En déduire alors que le vecteur colonne D obtenu à la Question 1.1 vérifie $D_j > 0$, pour tout $1 \leq j \leq N$, ce qu'on note désormais $D > 0$.

Au niveau discret, la propriété dite de *principe du maximum discret* correspondant à la propriété montrée au niveau continu à la Question 2.1. revient à affirmer que la solution U de $\mathcal{C}U = D$ avec $D > 0$ vérifie $U > 0$ (c'est-à-dire $U_j > 0$ pour tout $1 \leq j \leq N$). On va montrer maintenant cette propriété.

Question 2.3. Expliciter, en fonction des paramètres c, d, h du problème, la valeur de la meilleure constante β_{min} telle que, si $\beta \geq \beta_{min}$, on a :

$$\sum_{1\leq j\leq N} \mathcal{C}_{ij} \geq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N \tag{9}$$

et

$$\mathcal{C}_{ij} \leq 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \neq j \leq N \tag{10}$$

Question 2.4. On suppose que le vecteur colonne X est solution de $\mathcal{C}X = Y$ avec $Y \geq 0$ (c'est-à-dire $Y_j \geq 0$, $1 \leq j \leq N$). Vérifier que, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\left(\sum_{1\leq j\leq N} \mathcal{C}_{ij}\right)X_i \geq \sum_{j\neq i} \mathcal{C}_{ij}(X_i - X_j). \tag{11}$$

Soit alors i_0 un indice tel que $X_{i_0} = Min_{1 \le j \le N} X_j$. En étudiant plus précisément les valeurs de $\sum_{1 \le j \le N} \mathcal{C}_{ij}$ $(1 \le i \le N)$ et $\mathcal{C}_{ij}$ $(1 \le i \ne j \le N)$ obtenues à la Question 2.3, et en utilisant notamment l'inégalité (11) pour $i = i_0$, montrer que $X_{i_0} \ge 0$. En déduire que la matrice $\mathcal{C}^{-1}$ a tous ses coefficients positifs ou nuls.

Question 2.5. Déduire des Questions 2.2 à 2.4 que, sous une condition sur β, on a bien $U > 0$.

Question 2.6. En examinant les deux cas où β est nul et où il ne l'est pas, comparer du point de vue de ce principe du maximum discret la méthode des éléments finis P_1 standards et cette méthode d'éléments finis de Petrov-Galerkin.

3 Convergence de la méthode

Pour montrer la convergence de la méthode (6), on revient à un cadre général abstrait.

On suppose dans cette partie que V est un espace de Hilbert réel, dont la norme est notée $\|.\|_V$ et le produit scalaire $(.,.)_V$. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive dans V :

$$\begin{aligned} &|a(u,v)| \le M\|u\|_V \, \|v\|_V, \\ &a(u,u) \ge \alpha \|u\|_V^2, \end{aligned} \tag{12}$$

pour tout u, v dans V et deux constantes $M < +\infty$ et $\alpha > 0$ fixées. Soient L une forme linéaire continue sur V et u_0 l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_0 \in V \text{ tel que}, \\ a(u_0, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{13}$$

Soient enfin V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de V. On va s'intéresser au problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_1 \in V_1 \text{ tel que}, \\ a(u_1, v) = L(v), \quad \forall v \in V_2. \end{array} \right. \tag{14}$$

Question 3.1. Montrer par un exemple simple que, sans hypothèse supplémentaire, il est possible que le problème (14) n'ait aucune solution.

On suppose désormais dans cette section que les deux conditions suivantes sont remplies :

$$\inf_{u \in V_1, \|u\|_V = 1} \quad \sup_{v \in V_2, \|v\|_V \le 1} |a(u,v)| \quad > 0 \tag{15}$$

(on note désormais K le membre de gauche de (15)), et

$$\text{Pour tout } \; v \ne 0 \in V_2, \qquad \sup_{u \in V_1} |a(u,v)| > 0. \tag{16}$$

Question 3.2. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire R de V_1 dans V_2 tel que

$$(Ru, v)_V = a(u, v), \quad \forall\ (u, v) \in V_1 \times V_2. \tag{17}$$

Montrer de plus que

$$K\|u\|_V \leq \|Ru\|_V \leq M\|u\|_V, \forall\ u \in V_1. \tag{18}$$

Question 3.3. Montrer que $R(V_1)$ est un sous-espace vectoriel fermé de V_2, d'orthogonal réduit à $\{0\}$. En déduire $R(V_1) = V_2$.

Question 3.4. Montrer que (14) a une solution unique, notée u_1.

Soit P l'opérateur de projection orthogonale de V sur V_2. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire A de V dans lui-même tel que

$$(Au, v)_V = a(u, v) \quad \forall\ (u, v) \in V \times V. \tag{19}$$

Montrer de plus que

$$Ru_1 = P\,A\,u_0, \tag{20}$$

où u_0 est la solution de (13).

Question 3.5. Montrer que, pour tout $u \in V_1$,

$$Ru = P\,A\,u. \tag{21}$$

En déduire l'estimation

$$\|u_0 - u_1\|_V \leq (1 + \frac{M}{K}) \inf_{v \in V_1} \|u_0 - v\|_V. \tag{22}$$

On admet (ce n'est pas difficile, mais c'est un peu calculatoire de le montrer) que les conditions (15) et (16) sont remplies dans le cas considéré à la Section 1 des espaces V, $V_1 = V_1^h$ et $V_2 = V_2^h$ et de la forme a.

Question 3.6. Déduire de l'estimation (22) que l'approximation employée dans ce problème converge quand h tend vers 0.

FIN

Devoir de MAP 431 : Eléments de corrigé

Question 0.1.

La formulation (1) admet une et une unique solution par simple application du théorème de Lax-Milgram (on notera en particulier que

$$\int_0^1 u'u = 0,$$

pour toute fonction $u \in H_0^1(]0,1[)$ car ceci est vrai pour les fonctions de classe C^1 et on procède ensuite par densité). En choisissant d'abord v de classe C^∞ et à support compact dans $]0,1[$, on trouve que u_0 résout

$$-du_0'' + cu_0' = 0 = f,$$

au moins au sens des distributions. Ceci montre en particulier que u_0" est de carré intégrable, et donc que $u_0 \in H^2$. Il s'ensuit que u_0 est de classe C^1, et donc, encore par l'équation que u_0'' est continue. La condition au bord $u_0(0) = u_0(1) = 0$ a par ailleurs un sens classique puisqe u_0 est une fonction continue.

1. Formulation Petrov-Galerkin

Question 1.1. Un calcul immédiat montre que la valeur des coefficients est

$$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & d\int \phi'_{j-1}\psi'_{j,\beta} + c\int \phi'_{j-1}\psi_{j,\beta} \\ B & = & d\int \phi'_{j}\psi'_{j,\beta} + c\int \phi'_{j}\psi_{j,\beta} \\ C & = & d\int \phi'_{j+1}\psi'_{j,\beta} + c\int \phi'_{j+1}\psi_{j,\beta} \\ D_j & = & \int_0^1 f\psi_{j,\beta} \end{array}\right.$$

où le second membre des trois premières lignes ne dépend en fait pas de j variant de 2 à $N-1$ (pour $j=1$ et $j=N$, on ne considère pas A et C respectivement). De là, on évalue par un calcul analytique les intégrales, et l'on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & -\frac{d}{h} - \frac{c}{2}(1+\beta) \\ B & = & \frac{2d}{h} - c\beta \\ C & = & -\frac{d}{h} + \frac{c}{2}(1-\beta) \end{array}\right.$$

Question 1.2.

On remarque simplement que

$$\begin{aligned}
(W^t)\mathcal{C}W &= d(W^t)\mathcal{A}W + c(W^t)\mathcal{B}W \\
&= d(W^t)\mathcal{A}W + c(W^t)\left(\frac{\mathcal{B}+\mathcal{B}^t}{2}\right)W \\
&= (d+\frac{\beta h}{2})(W^t)\mathcal{A}W
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{A}$ est inversible (elle est symétrique définie positive), il s'ensuit que $\mathcal{C}$ l'est aussi.

2. Une propriété qualitative

Question 2.1.

La fonction u_0 étant continue, elle atteint son minimum sur le compact $[0,1]$. Supposons qu'il existe un point x_0 intérieur à $[0,1]$, où u_0 atteint son minimum. Comme u_0 est de classe C^2 on peut donc affirmer $u_0'(x_0)=0$ et $u_0''(x_0)\geq 0$, ce qui, avec l'équation, aboutit à une contradiction puisque $f(x_0)>0$. Par conséquent, le minimum de u_0 est zéro, il est atteint sur le bord de $[0,1]$, et en tous les points intérieurs, $u_0>0$.

Question 2.2.

Pour $\beta \leq \beta_{max} = \frac{1}{3}$ il est simple de voir que $\psi_{j,\beta}$ est strictement positive sur l'intervalle demandé. De là,

$$D_j = \int_0^1 f(x)\psi_{j,\beta](x)dx>0.}$$

Question 2.3. On calcule le seuls termes non nuls de la matrice $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases}
\mathcal{C}_{ii} &= \dfrac{2d}{h} + c\beta, \;\; 1\leq i \leq N \\
\mathcal{C}_{i,i+1} &= -\dfrac{d}{h} + \dfrac{c}{2}(1-\beta), \;\; 1\leq i\leq N-1 \\
\mathcal{C}_{i,i-1} &= -\dfrac{d}{h} + \dfrac{c}{2}(-1-\beta) \;\; 2\leq i\leq N
\end{cases}$$

De là,

$$\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\mathcal{C}_{1j} &= \dfrac{d}{h} + \dfrac{c}{2}(1+\beta) \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\mathcal{C}_{ij} &= 0, \;\; 2\leq i\leq N \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\mathcal{C}_{Nj} &= \dfrac{d}{h} + \dfrac{c}{2}(-1+\beta)
\end{cases}$$

On constate donc que pour $\beta \geq \beta_{min}$ où β_{min} est défini par $-\dfrac{d}{h} + \dfrac{c}{2}(1 - \beta_{min}) = 0$, on a les propriétés voulues, et plus exactement

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{ii} \geq c & > \ 0, \ 1 \leq i \leq N \\ \mathcal{C}_{i,i+1} & \leq \ 0 \ \ 1 \leq i \leq N-1 \\ \mathcal{C}_{i,i-1} \leq -c & < \ 0 \ \ 2 \leq i \leq N \end{cases}$$

De là,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathcal{C}_{1j} \geq c & > \ 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathcal{C}_{ij} & = \ 0, \ 2 \leq i \leq N \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathcal{C}_{Nj} & \geq \ 0 \end{cases}$$

Question 2.4. La formule (11),i.e.

$$\Big(\sum_{1 \leq j \leq N} \mathcal{C}_{ij} \Big) X_i \geq \sum_{j \neq i} \mathcal{C}_{ij}(X_i - X_j)$$

s'obtient en écrivant

$$\mathcal{C}_{ii} X_i + \sum_{j \neq i} \mathcal{C}_{ij} X_j = Y_i \geq 0,$$

et en insérant $\sum_{j \neq i} \mathcal{C}_{ij} X_i$ et son opposé au membre de gauche.

On considère alors un indice i_0 tel que $X_{i_0} = Min_{1 \leq j \leq N} X_j$. Si pour cet indice, la quantité $\sum_{1 \leq j \leq N} \mathcal{C}_{i_0 j}$ est strictement positive, alors (11) pour l'indice i_0 implique $X_{i_0} \geq 0$ (noter en effet que le membre de droite de (11) est une somme de produits de deux termes négatifs) et donc il en est de même pour tous les X_i. Cependant, on n'est pas sûr que $\sum_{1 \leq j \leq N} \mathcal{C}_{i_0 j} > 0$, car ceci est faux si $2 \leq i_0 \leq N-1$ et incertain si $i_0 = N$. On peut donc procéder de deux manières.

On peut perturber la matrice $\mathcal{C}$ en la transformant en $\mathcal{C} + \varepsilon Id$ pour un certain coefficient $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et alors on obtient le résultat de positivité voulu sur $X = (\mathcal{C} + \varepsilon Id)^{-1} Y$, puis on passe à la limite quand ε tend vers 0.

Une deuxième méthode consiste à remarquer que si $i_0 \geq 2$, alors vu les valeurs trouvées à la question précédente, on a nécessairement $X_{i_0 - 1} = X_{i_0}$ (en appliquant simplement (11) pour $i = i_0$ et en utilisant l'information $\mathcal{C}_{i_0, i_0 - 1} < 0$). De proche en proche on obtient ainsi $X_1 = X_{i_0}$. De là, en appliquant le fait que $\sum_{1 \leq j \leq N} \mathcal{C}_{1j} > 0$ on obtient $X_1 \geq 0$ et le résultat voulu.

Finalement, en appliquant la Question 2.4 successivement à tous les $Y = e_i$ vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^N$, on obtient que tous les coefficients $(\mathcal{C}^{-1})_{ij}$ sont positifs ou nuls.

Question 2.5. On fixe $\beta_{min} \leq \beta \leq \beta_{max}$. On remarque que

$$U_i = \sum_{j=1}^{N} (\mathcal{C}^{-1})_{ij} D_j,$$

et que le membre de droite est une somme de produits d'un nombre positif ou nul par un nombre strictement positif. Ceci montre que $U_i \geq 0$. Mieux, $U_i = 0$ impliquerait que tous les $(\mathcal{C}^{-1})_{ij}$ sont nuls, c'est-à-dire que la matrice $\mathcal{C}^{-1}$ a une ligne entièrement nulle, ce qui ne peut pas être pour une matrice inversible. Donc $U_i > 0$.

Question 2.6.

On vient d'obtenir que, pour $\beta \leq \frac{1}{3}$, la discrétisation avait la propriété du principe du maximum discret si le pas h est choisi de sorte que

$$h \leq \frac{2d}{c} \frac{1}{1-\beta}.$$

Dans le cas des éléments finis P_1 qui correspond bien entendu au cas $\beta = 0$, cette restriction sur le maillage s'écrit

$$h \leq \frac{2d}{c}$$

Pour la méthode Petrov-Galerkin, correspondant à $\beta > 0$, cette restriction est en revanche moins contraignante, puisque

$$\frac{1}{1-\beta} > 1.$$

De ce point de vue qualitatif, la méthode de Petrov Galerkin est donc meilleure.

3. Convergence de la méthode

Question 3.1.

On prend pour forme bilinéaire a le produit scalaire de V. On choisit deux espaces V_1 et V_2 orthogonaux et on prend une forme $L \not\equiv 0$. Il n'existe alors pas de solution.

Question 3.2.

Pour chaque $u \in V_1$, l'existence et l'unicité de Ru découle du Théorème de représentation de Riesz, ou du Théorème de Lax-Milgram. Il est facile de voir, par unicité précisément, que Ru dépend linéairement de u. La dépendance continue provient de la continuité de la forme bilinéaire a. Les inégalités (18) découlent immédiatement.

Question 3.3. Pour montrer que $R(V_1)$ est un sous-espace vectoriel fermé de V_2, on considère une suite $u_n \in V_1$ telle que la suite $R(u_n)$ converge vers $w \in V_2$. Comme $R(u_n)$ converge, cette suite est de Cauchy, et donc, en utilisant la partie de gauche de (18)), la suite u_n est aussi de Cauchy. Comme V_1 est une fermé du Hilbert V, u_n converge dans V_1, vers un certain u ; Par continuité de R, on a donc $Ru = w$ et donc $w \in R(V_1)$. Ce sous espace est donc fermé.

Par ailleurs, si v est orthogonal à $R(V_1)$, on a $a(u, v) = (v, Ru)_V = 0$ pour tout $u \in V_1$, et donc avec (16), $v = 0$. Donc $R(V_1)^\perp = \{0\}$. Comme $R(V_1)$ est fermé, il est donc égal à V_2.

Question 3.4.

Comme L est une forme linéaire continue, en particulier sur V_2, on sait par le Théorème de représentation de Riesz qu'il existe $w \in V_2$ tel que $L(v) = (w, v)_V$ pour tout $v \in V_2$. Le problème (14) revient alors à trouver $u_1 \in V_1$ tel que $w = Ru_1$, ce qui est possible, et de façon unique, puisque R est bijectif de V_1 sur V_2.

Encore une fois, on applique alors le Théorème de représentation de Riesz pour construire A. On a alors, pour tout $v \in V_2$, d'une part d'après la Question 3.1,

$$L(v) = a(u_1, v) = (Ru_1, v)_V,$$

et d'autre part, d'après la Question 3.4,

$$L(v) = a(u_0, v) = (Au_0, v)_V.$$

0n en déduit $(Ru_1 - Au_0, v)_V = 0$ pour tout $v \in V_2$, donc, comme $Ru_1 \in V_2$, $Ru_1 = PAu_0$.

Question 3.5.

Pour tout $u \in V_1$ et $v \in V_2$, on a

$$(Ru, v)_V = a(u, v) = (Au, v)_V = (PAu, v)_V,$$

donc $Ru = PAu$. Ceci permet d'écrire

$$\begin{aligned} u_0 - u_1 &= u_0 - R^{-1}PAu_0 \\ &= (u - R^{-1}PAu) + ((u_0 - u) - R^{-1}PA(u_0 - u)) \\ &= 0 + ((u_0 - u) - R^{-1}PA(u_0 - u)), \end{aligned}$$

donc

$$\|u_0 - u_1\|_V \leq (1 + \|R^{-1}\|\|P\|\|A\|)\, \|u_0 - u\|_V,$$

et le résultat annoncé puisque $\|R^{-1}\| \leq 1/K$, $\|P\| = 1$, $\|A\| \leq M$.

A ce stade, on peut en fait montrer que les hypothèses (15) et (16) sont vérifiées dans notre cas.

En 2 mots, il s'agit d'abord de prouver, et c'est un calcul un peu long, que

$$\|\sum_{i=1}^{N} V_i \psi_{i,\beta}\|_V^2 = (1 + 3\beta^2)(V^t)\mathcal{A}V. \tag{23}$$

On en déduit l'expression explicite de K suivante

$$K = \inf_{U \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}} \sup_{V \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}} \frac{|(V^t)\mathcal{C}U|}{\sqrt{(U^t)\mathcal{A}U}\sqrt{1+3\beta^2}\sqrt{(V^t)\mathcal{A}V}}. \tag{24}$$

A partir de ces deux formules, et de la Question 1.2, on peut alors montrer directement les conditions (15) et (16).

Question 3.6. On sait d'après le cours Lemme 6.2.4 (inégalité d'interpolation) que, pour toute fonction u_0 de $H_0^1(]0,1[)$, on a

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \inf_{v \in V_1^h} \|u_0 - v\|_V = 0,$$

ce qui implique, d'après (22) que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|u_0 - u_1^h\|_V = 0.$$

La convergence de la méthode est donc prouvée. FIN DU CORRIGE