Ecole Polytechnique, Promotion 2001
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 29 avril 2003
Sujet proposé par G. Allaire

1 Différences finies

On considére l'équation de la chaleur dans $(0,1)$ avec condition aux limites périodique

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t,x+1) = u(t,x) \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1). \end{array}\right. \tag{1}$$

Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. On note aussi

$$(\delta^2 u)_j^n = u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n.$$

On considère le schéma suivant

$$\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{5}{6}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\Delta t} - \nu \frac{(\delta^2 u)_j^{n+1} + (\delta^2 u)_j^n}{2(\Delta x)^2} = 0,$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites $u_{j+N}^n = u_j^n$, $\forall j$.

1. Vérifier que le schéma est bien défini et qu'il est consistant.
2. Montrer que le schéma est stable en norme L^2. Que peut-on dire de sa convergence ?
3. Montrer que le schéma est précis à l'ordre 2 en temps et 4 en espace. Indication : on pourra utiliser des formules de Taylor centrées sur le point $((n+1/2)\Delta t, j\Delta x)$.

2 Formulation variationnelle

Pour prédire le fonctionnement d'un réacteur nucléaire il est nécessaire de connaître la répartition des neutrons dans le coeur du réacteur. Ces neutrons sont produits par fission, puis diffusent et collisionnent dans le milieu. Suivant leur énergie cinétique on regroupe les neutrons en deux groupes distincts : le premier groupe des neutrons de haute énergie (dit rapides), et le deuxième groupe des neutrons de faible énergie (dit lents ou thermiques). Pour chaque groupe d'énergie on écrit un bilan de conservation de la densité de neutrons, notée respectivement u_1 et u_2 : les pertes par diffusion, absorption et collision sont égales aux gains dûs aux termes sources et aux collisions (les collisions peuvent changer l'énergie des neutrons). Par ailleurs, on suppose qu'il n'y a pas de neutrons hors du réacteur, ce qui, par continuité, entraine que les densités de neutrons s'annulent sur le bord. Un tel modèle est alors décrit par le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} -d_1 \Delta u_1 + \sigma_{11} u_1 = f + \sigma_{12} u_2 & \text{dans } \Omega, \\ -d_2 \Delta u_2 + \sigma_{22} u_2 = \sigma_{21} u_1 & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2}$$

où Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$) est le domaine occupé par le coeur du réacteur, $f \in L^2(\Omega)$ est un terme source (représentant la production par fission qui ne crée que des neutrons rapides), $d_1 > 0$ et $d_2 > 0$ sont des constantes positives de diffusion, les $\sigma_{ij} > 0$ sont des constantes positives telles que σ_{ii} est le taux de disparition de neutrons du groupe i (par absorption ou collision) et σ_{ij} est le taux d'apparition de neutrons dans le groupe i après collision en provenance du groupe j. On suppose que les transferts de groupe d'énergie sont faibles par rapport à l'absorption au sens où

$$\sigma_{12} + \sigma_{21} \leq 2\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}.$$

On note σ la matrice définie par (attention aux signes)

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice σ est positive au sens où $\sigma\xi \cdot \xi \geq 0$ pour tout vecteur $\xi \in \mathbb{R}^2$.
2. Donner une formulation variationnelle de (2) dont on montrera qu'elle admet une unique solution, et préciser en quel sens on a résolu le problème aux limites (2) (on admettra que la solution de la formulation variationnelle vérifie $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$).
3. On suppose que $f \geq 0$ p.p. dans Ω (c'est-à-dire qu'il y a création de neutrons par fission). Montrer que les densités de neutrons sont positives, c'est-à-dire que $u_1 \geq 0$ et $u_2 \geq 0$ p.p. dans Ω. Indication : on multipliera la première équation de (2) par u_1^-, la deuxième par u_2^-, et on intègrera par parties la somme. Rappel : $u^- = \min(0, u)$.