Ecole Polytechnique, Promotion 2002
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 27 avril 2004
Sujet proposé par G. Allaire

1 Différences finies

On considére l'équation des poutres vibrantes dans $(0,1)$ avec condition aux limites périodique

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\nu\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \text{ pour } (x,t)\in(0,1)\times\mathbb{R}_*^+\\ u(t,x+1)=u(t,x) \text{ pour } (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+\\ u(0,x)=u_0(x) \text{ pour } x\in(0,1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=u_1(x) \text{ pour } x\in(0,1),\end{array}\right. \tag{1}$$

où l'inconnue $u(t,x)$ désigne le déplacement transverse de la poutre (à valeurs dans $\mathbb{R}$), et $\nu>0$ est une constante. Pour $\Delta t>0$ et $\Delta x=1/N>0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n,x_j)=(n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n\geq 0, j\in\mathbb{Z}.$$

On note $u_j^n\in\mathbb{R}$ une approximation discrète au point (t_n,x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. De même $\sigma_j^n\in\mathbb{R}$ est une approximation de $\sigma(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$. On utilise la notation

$$(\delta^2 u)_j^n=u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n.$$

On considère le schéma explicite suivant

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2}+\nu\frac{(\delta^2\sigma)_j^n}{(\Delta x)^2}=0 \quad\text{et}\quad \sigma_j^n=\frac{(\delta^2 u)_j^n}{(\Delta x)^2} \tag{2}$$

avec la donnée initiale $u_j^0=u_0(x_j)$, $u_j^1=u_j^0+(\Delta t)u_1(x_j)$, et la condition aux limites $u_{j+N}^n=u_j^n$, $\forall j$.

1. Vérifier que le schéma (2) est bien consistant et le réécrire en éliminant les σ_j^n.
2. Montrer que le schéma est instable en norme L^2 si

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}>\frac{1}{2\sqrt{\nu}},$$

et qu'il vérifie la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann sinon. (On ne demande **surtout pas** de prouver qu'il est stable en norme L^2.)

3. On modifie le schéma (2) pour le rendre implicite

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \nu \frac{(\delta^2 \sigma)_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_j^{n+1} = \frac{(\delta^2 u)_j^{n+1}}{(\Delta x)^2}.$$

Montrer que ce schéma implicite vérifie inconditionnellement la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann.

2 Formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$. Soit $f(x) \in L^2(\Omega)$, et $b(x)$ un champ de vecteurs continûment différentiable de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^N$ tel que

$$\operatorname{div} b = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

On introduit deux formulations variationnelles : trouver $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega (\nabla u_1(x) + b(x)u_1(x)) \cdot (\nabla v(x) + b(x)v(x))\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{3}$$

et trouver $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega (\nabla u_2(x) + b(x)u_2(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{4}$$

1. Montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (3).
2. Même question pour (4).
3. Retrouver formellement (c'est-à-dire en supposant que la solution u_1 est régulière) le problème aux limites vérifié par u_1. Même question pour u_2. Quelle est la "bonne" formulation variationnelle entre (3) et (4) pour résoudre un problème de convection-diffusion ?
4. On se place désormais en dimension $N = 1$ d'espace, et on pose $\Omega = (0, 1)$. On suppose désormais que $b(x)$ est constant non nul. On applique la méthode des éléments finis P_1 sur un maillage uniforme. Calculer la matrice de "rigidité" issue de cette méthode pour les deux modèles (3) et (4). Discuter la différence entre ces deux matrices.