Ecole Polytechnique
Analyse numérique et optimisation, MAP431
Septembre 2002 (3 heures)
(Sujet proposé par G. Allaire et P. Joly)

1 Différences finies pour une équation d'advection (1/6 de la note)

Soit l'équation d'advection en une dimension d'espace dans le domaine borné $(0,1)$ avec une vitesse constante $V > 0$ et des conditions aux limites de périodicité

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + V\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x+1) = u(t,x) & \text{pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } x \in (0,1). \end{cases} \tag{1}$$

On discrétise l'espace avec un pas $\Delta x = 1/(N+1) > 0$ (N entier positif) et le temps avec $\Delta t > 0$. On note $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$ pour $n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N+1\}$, et u_j^n la valeur d'une solution discrète approchée au point (t_n, x_j).

On considère un schéma explicite pour (1) du type

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n. \tag{2}$$

1. A quelles conditions sur les constantes α, β, γ le schéma (2) est-il consistant avec l'équation (1) ?
2. Montrer qu'il existe un unique choix de α, β, γ (qu'on donnera explicitement) pour que le schéma (2) soit précis à l'ordre 2 en espace et temps.
3. Montrer que ce schéma d'ordre 2 est stable en norme L^2 sous une condition que l'on précisera. Que peut-on dire de sa convergence ?

2 Sur la consommation des ménages (1/3 de la note)

On considère un ménage qui peut consommer n types de marchandises dont les prix forment un vecteur $p \in \mathbb{R}_+^n$. Son budget à dépenser est un réel $b > 0$, et ses choix de consommation sont modélisés par une fonction d'utilité $u(x)$ de $\mathbb{R}_+^n$ dans $\mathbb{R}$, qui mesure le bénéfice que le ménage tire de la consommation de la quantité x des n marchandises. On suppose que la fonction u est différentiable au sens de Fréchet et strictement concave sur $\mathbb{R}_+^n$ (i.e. $-u$ est strictement convexe). La consommation du ménage sera le vecteur $x(b)$ qui réalisera le maximum de

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^n,\ x \cdot p \leq b} u(x), \tag{3}$$

c'est-à-dire qui maximise l'utilité sous une contrainte de budget maximal.

1. Vérifier qu'il existe bien un unique vecteur $x(b)$ qui réalise le maximum de (3).
2. Ecrire la condition d'optimalité de (3). Pourquoi est-elle nécessaire et suffisante ? On notera $\lambda(b) \in I\!R$ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de budget et $\mu(b) \in I\!R^n$ celui associé à la contrainte de positivité $x \geq 0$. Interpréter économiquement cette condition d'optimalité en terme de rapport marginal qualité-prix.
3. On note $m(b)$ la valeur maximale de (3). Montrer que si $b + \delta \geq 0$, alors
$$m(b + \delta) \leq m(b) + \lambda(b)\delta. \tag{4}$$
4. Déduire de (4) que si $b \mapsto m(b)$ est dérivable, alors
$$\lambda(b) = \frac{dm}{db}(b).$$
Interpréter économiquement ce résultat.

3 Conditions de transmission dans les milieux inhomogènes (1/2 de la note)

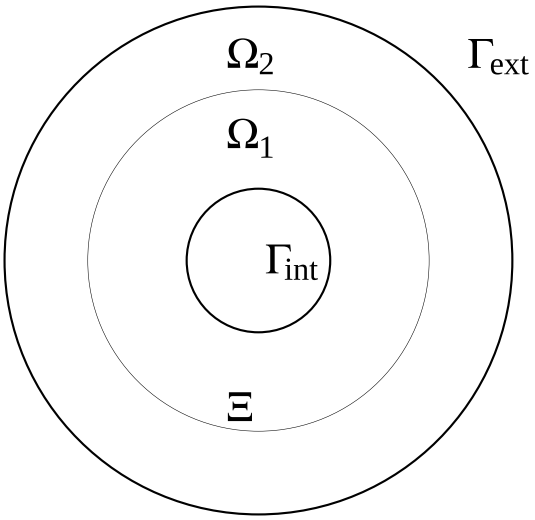

FIG. 1 – Domaine Ω.

Soient Ω, Ω_1 et Ω_2 les ouverts de $I\!R^2$, définis en coordonnées polaires (r, θ) par

$$\Omega = \{(r,\theta);\ \ 1 < r < 3\}; \quad \Omega_1 = \{(r,\theta);\ \ 1 < r < 2\}; \quad \Omega_2 = \{(r,\theta);\ \ 2 < r < 3\}.$$

On note Γ_{ext} (resp. Γ_{int}) le bord extérieur (resp. intérieur) de Ω, et on pose $\Gamma = \Gamma_{ext} \cup \Gamma_{int}$ (voir la figure 1). Nous allons étudier deux équations de conduction dans lesquelles Ω_1 et Ω_2 s'interprèteront comme des milieux de nature différente.

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et a une fonction mesurable dans Ω telle que, pour des constantes $\beta \geq \alpha > 0$,

$$\beta \geq a(x) \geq \alpha \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{5}$$

On considère une première formulation variationnelle : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \left(\int_{\Gamma_{int}} u(\gamma)d\gamma\right)\left(\int_{\Gamma_{int}} v(\gamma)d\gamma\right)\\ &= \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \text{pour tout} \quad v \in H^1(\Omega).\end{aligned} \tag{6}$$

1. Montrer l'inégalité de type Poincaré : il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega a(x)|\nabla v(x)|^2 dx + \left(\int_{\Gamma_{int}} v(\gamma)d\gamma\right)^2 \geq C\int_\Omega v(x)^2 dx. \tag{7}$$

   (Indication : on pourra raisonner par l'absurde.)
2. Montrer que le problème (6) possède une solution unique $u \in H^1(\Omega)$.
3. **Dans toute la suite** on suppose $a(x)$ constant sur Ω_1 et Ω_2, de valeur notées a_1 et a_2, respectivement. Montrer que

$$-a_i\,\Delta u(x) = f(x), \qquad \text{p.p. } x \in \Omega_i, \quad i = 1,2. \tag{8}$$

4. Quelles conditions aux limites la solution u vérifie-t-elle sur Γ_{ext} et Γ_{int} ? (On pourra supposer que la solution est régulière par morceaux, $u \in H^2(\Omega_i)$ pour $i = 1,2$.)
5. On note l'interface entre Ω_1 et Ω_2 par

$$\Xi = \{(r,\theta);\ \ r = 2\}.$$

   Soit $\xi \in \Xi$; on note $n = n(\xi)$ la normale unitaire à Ξ au point ξ, dirigée vers Ω_2. On note u_i la restriction de u à Ω_i, $i = 1,2$, et on suppose u_1 et u_2 de classe C^1 sur l'adhérence de Ω_1 et Ω_2. Montrer la relation de conservation des flux à l'interface

$$a_1\frac{\partial u_1}{\partial n}(\xi) = a_2\frac{\partial u_2}{\partial n}(\xi), \qquad \text{p.p. } \xi \in \Xi\,. \tag{9}$$

6. On repère un point de Ξ par sa coordonnée polaire $\theta \in [0, 2\pi[$, et on considère une deuxième formulation variationnelle : trouver $u \in H^1_\Xi(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \left(\int_{\Gamma_{int}} u(\gamma)d\gamma\right)\left(\int_{\Gamma_{int}} v(\gamma)d\gamma\right)\\ &+\int_\Xi \frac{\partial u}{\partial\theta}(\theta)\frac{\partial v}{\partial\theta}(\theta)d\theta = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \text{pour tout} \quad v \in H^1_\Xi(\Omega).\end{aligned} \tag{10}$$

   L'espace $H^1_\Xi(\Omega)$ ci-dessus est défini de la manière suivante. Soit $H^1(\Xi)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\Xi)$ à dérivée par rapport à θ dans $L^2(\Xi)$, qui vérifient de plus la condition de périodicité $v(0) = v(2\pi)$. On admettra (c'est facile à vérifier) que $H^1(\Xi)$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v_\Xi\|^2_{H^1(\Xi)} = \int_0^{2\pi}\left(v(\theta)^2 + v'(\theta)^2\right)d\theta,$$

et que les fonctions de $H^1(\Xi)$ sont continues par rapport à θ (puisqu'elles ne dépendent que d'une variable en dimension 1). On note v_Ξ la trace de $v \in H^1(\Omega)$ sur Ξ. On pose alors

$$H^1_\Xi(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega); \;\; v_\Xi \in H^1(\Xi)\}. \tag{11}$$

Montrer que l'espace $H^1_\Xi(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|v\|^2_{H^1_\Xi(\Omega)} = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v_\Xi\|^2_{H^1(\Xi)}$$

et que la forme bilinéaire de (10) est continue et coercive sur $H^1_\Xi(\Omega)$. En déduire que (10) a une solution unique.

7. Quelle est la relation (qui remplace la conservation des flux (9)) que vérifie la solution de (10) sur l'interface Ξ ? (On pourra raisonner formellement). Interpréter physiquement cette relation.