Ecole Polytechnique
Analyse numérique et optimisation, MAP431
Septembre 2003 (3 heures)
(Sujet proposé par G. Allaire)

1 Différences finies (1/4 de la note)

Soit un réel $a > 0$. Soit $\Delta t > 0$ et $\Delta x = \frac{1}{N}$ des pas de temps et d'espace respectivement (avec N un entier positif). On considère le schéma de différences finies suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{4u_j^n - 3u_{j-1}^n - u_{j+1}^n}{2\Delta x} = 0, \qquad (1)$$

pour $n \geq 0$, et $0 \leq j \leq N$, que l'on complète par une condition initiale

$$u_j^0 = u^0(j\Delta x),$$

et une condition aux limites de périodicité

$$u_0^n = u_N^n \quad \forall n \geq 0.$$

1. De quelle équation aux dérivées partielles le schéma (1) est-il une discrétisation ?
2. Montrer que le schéma (1) vérifie un principe du maximum discret sous une condition CFL que l'on précisera. Que peut-on en déduire sur la stabilité du schéma ? Et sur sa convergence ?
3. Etudier la stabilité L^2 du schéma (1).
4. Vérifier que le schéma est d'ordre 1 en espace et en temps mais pas d'ordre 2.

2 Programmation linéaire (1/4 de la note)

En utilisant la dualité, résoudre sans calculs le programme linéaire

$$\min_{x_i \geq 0,\ 1\leq i\leq 6} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 24x_5 + 15x_6$$

sous les contraintes d'égalité

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_5 - 3x_6 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 - 5x_6 = 0. \end{array} \right.$$

On fera un dessin pour résoudre le problème dual.

3 Système de Lamé (1/2 de la note)

Soit Ω un ouvert borné régulier de $I\!R^2$. Soit μ et ν deux constantes réelles telles que

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad \nu \geq 0. \qquad (2)$$

Soit $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$. On considère la formulation variationnelle suivante : trouver $u = (u_1, u_2) \in H^1_0(\Omega)^2$ tel que

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \nu \int_\Omega \mathrm{div} u \, \mathrm{div} v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \tag{3}$$

pour tout $v = (v_1, v_2) \in H^1_0(\Omega)^2$. On rappelle que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \Big(\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \Big) dx.$$

1.1 Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (3).

1.2 Trouver formellement (i.e. en supposant la solution régulière) le problème aux limites correspondant à (3). Dans quel sens a-t-on résolu ce problème aux limites ?

1.3 Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (3) en remplaçant l'hypothèse (2) par

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad \mu + 2\nu > 0. \tag{4}$$

Indication : on utilisera la décomposition orthogonale de toute matrice en la somme d'un multiple de l'identité et d'une matrice à trace nulle et le fait que $\mathrm{div} v = tr(\nabla v)$.

Soit $g = (g_1, g_2) \in L^2(\partial\Omega)^2$. On considère maintenant la nouvelle formulation variationnelle : trouver $u = (u_1, u_2) \in X$ tel que

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \nu \int_\Omega \mathrm{div} u \, \mathrm{div} v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot v \, ds \tag{5}$$

pour tout $v = (v_1, v_2) \in X$.

On choisit d'abord $X = H^1(\Omega)^2$.

2.1 Montrer que si u est solution de (5), alors $u + C$, où $C = (C_1, C_2)$ est un vecteur constant arbitraire, est aussi solution.

2.2 Quelle condition nécessaire doivent satisfaire f et g pour qu'il puisse exister une solution de (5).

2.3 Trouver formellement (i.e. en supposant la solution régulière) le problème aux limites correspondant à (5).

2.4 Modifier la définition de X afin d'éliminer l'indétermination à une constante près, et démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (5) en supposant que f et g vérifient la condition nécessaire trouvée plus haut.

On choisit désormais

$$X = \Big\{ u = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Big\},$$

où n est la normale unitaire extérieure au bord $\partial\Omega$.

3.1 Montrer que les fonctions de X vérifient une inégalité de Poincaré, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que, pour tout $v \in X$, on a

$$\|v\|_{L^2(\Omega)^2} \le C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^4}.$$

On pourra raisonner par l'absurde.

3.2 En déduire l'existence et l'unicité de la solution de (5).

3.3 Trouver formellement le problème aux limites correspondant à (5) pour ce choix de X.