Ecole Polytechnique
Analyse numérique et optimisation, MAP431
Septembre 2004 (3 heures)
(Sujet proposé par G. Allaire)

1 Différences finies (1/5 de la note)

Soit un réel $\nu > 0$. Soit $\Delta t > 0$ et $\Delta x = \frac{1}{N}$ des pas de temps et d'espace respectivement (avec N un entier positif). On étudie la discrétisation de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+$$

avec des conditions aux limites périodiques en espace. Soit α, β, γ trois nombres réels indépendants de Δt et Δx. On considère le schéma de différences finies suivant

$$\frac{\alpha u_j^{n+1} + \beta u_j^n + \gamma u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0, \qquad (1)$$

pour $n \geq 0$, et $0 \leq j \leq N$, où u_j^n est une approximation de $u(n\Delta t, j\Delta x)$, et que l'on complète par une condition initiale et une condition aux limites de périodicité $u_j^n = u_{j+N}^n$ pour tout j et $n \geq 0$.

1. Quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent satisfaire les coefficients α, β, γ pour que le schéma (1) soit consistant ?
2. Trouver l'unique triplet α, β, γ tel que le schéma (1) soit d'ordre 2 en espace et en temps (le justifier). Indication : faire d'abord un développement limité en espace, puis en temps.
3. On choisit $\alpha = 1/2, \beta = 0, \gamma = -1/2$. Vérifier que ce schéma est inconditionnellement stable. Que peut-on dire de sa convergence ?

2 Formulation variationnelle (2/5 de la note)

Soit $\widetilde{\Omega}$ un ouvert borné régulier, simplement connexe, de $\mathbb{R}^N$. On y perce un trou $\mathcal{T}$, de manière à ce que le domaine percé $\Omega = \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{T}$ soit aussi un ouvert régulier dont la frontière est composée de deux parties disjointes $\Gamma_i = \partial \mathcal{T}$ et $\Gamma_e = \partial \widetilde{\Omega}$ (voir la Figure 1).

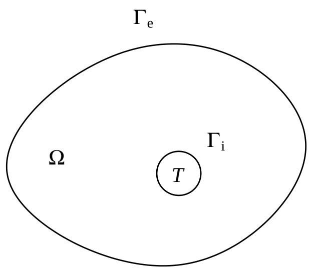

FIG. 1 – Ouvert percé d'un trou.

On définit l'espace

$$X = \left\{ u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_e \right\}.$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et un réel $\nu \geq 0$. On considère la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in X$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \nu \left(\int_{\Gamma_i} u \, n \, ds \right) \cdot \left(\int_{\Gamma_i} v \, n \, ds \right) = \int_\Omega f v \, dx \tag{2}$$

pour tout $v \in X$, où n est la normale unitaire extérieure au bord $\partial\Omega$.

1. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (2).
2. Trouver formellement (i.e. en supposant la solution régulière) le problème aux limites correspondant à (2). Dans quel sens a-t-on résolu ce problème aux limites ?
3. Montrer que (2) est équivalent à la nouvelle formulation variationnelle : trouver $u \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$ tel que
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \nu \left(\int_{\mathcal{T}} \nabla u \, dx \right) \cdot \left(\int_{\mathcal{T}} \nabla v \, dx \right) = \int_\Omega f v \, dx$$
pour tout $v \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$.
4. On suppose que $\nu > 0$. On considère une autre formulation variationnelle : trouver $u \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$ tel que
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \nu \int_{\mathcal{T}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \tag{3}$$
pour tout $v \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$. Vérifier que (3) admet une solution unique.
5. Montrer que (3) est bien différent de (2) en exhibant le problème aux limites correspondant à (3).

3 Optimisation (2/5 de la note)

Soit deux entiers $1 \leq m < n$. Soit une matrice rectangulaire réelle A de taille $m \times n$ et de rang m. Soit deux vecteurs non nuls $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$. On suppose que toutes les composantes de A, b, c sont positives ou nulles, que, dans chaque colonne de A, au moins un coefficient est strictement positif. On définit le cône positif de $\mathbb{R}^n$

$$K = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i \geq 0 \ \forall 1 \leq i \leq n \Big\}.$$

Sur K on définit la fonction

$$J(x) = c \cdot x + \sum_{i=1}^n x_i \log \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j} \right).$$

On considère le problème d'optimisation

$$\min_{x \in K, \ Ax = b} J(x). \tag{4}$$

Dans tout ce qui suit on suppose que l'ensemble $\{x \in K, \ Ax = b\}$ est non vide.

1. Montrer que $J(x)$ est bien définie et continue sur K.
2. Montrer que l'ensemble $\{x \in K, \ Ax = b\}$ est borné. En déduire qu'il existe au moins une solution optimale de (4).
3. Montrer que $J(tx) = tJ(x)$ pour tout $x \in K$ et tout $t > 0$. En déduire que J est convexe (on commencera par se ramener à $K \cap \{\sum_{i=1}^n x_i = 1\}$).
4. Calculer la dérivée de J et montrer qu'aucune solution optimale de (4) ne peut se trouver sur le bord de K.
5. Ecrire la condition nécessaire d'optimalité satisfaite par une solution optimale. Est-elle aussi suffisante ?