Ecole Polytechnique
Analyse numérique et optimisation, MAP431
Septembre 2002 (3 heures)
Corrigé
(Sujet proposé par G. Allaire et P. Joly)

1 Différences finies pour une équation d'advection (1/6 de la note)

1. Comme le schéma
$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n \tag{1}$$
est explicite, son erreur de troncature est
$$E = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - \Big(\alpha u(t_n, x_{j-1}) + \beta u(t_n, x_j) + \gamma u(t_n, x_{j+1})\Big)}{\Delta t},$$
où u est une fonction régulière, solution de l'équation d'advection. On fait un développement de Taylor autour du point (t_n, x_j). On obtient
$$E = \frac{1}{\Delta t}\left((1-\alpha-\beta-\gamma)u + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{O}\big(\Delta t)^2\big) + \Delta x(\alpha-\gamma)\frac{\partial u}{\partial x} - (\gamma+\alpha)\mathcal{O}\big(\Delta x)^2\big)\right).$$
Pour que l'erreur de troncature tende vers zéro, lorsque Δt et Δx le font, il faut et il suffit que
$$\alpha+\beta+\gamma = 1, \quad V\Delta t + \Delta x(\gamma-\alpha) = 0, \text{ et } \quad \lim(\gamma+\alpha)\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 0. \tag{2}$$

2. On poursuit le développement de Taylor à l'ordre 2 en tenant compte de (2)
$$E = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}(\Delta t)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}\big((\Delta t)^3\big) - \frac{1}{2}(\gamma+\alpha)(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\gamma-\alpha)\mathcal{O}\big((\Delta x)^3\big)\right).$$
Or, une solution régulière de l'équation d'advection vérifie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$
Par conséquent, l'erreur de troncature ne peut être du deuxième ordre que si
$$V^2(\Delta t)^2 = (\gamma+\alpha)(\Delta x)^2. \tag{3}$$
Les équations (2) et (3) conduisent à l'unique choix possible
$$\alpha = \frac{1}{2}c(c+1),\ \beta = 1-c^2,\ \gamma = \frac{1}{2}c(c-1),\ \text{avec } c = \frac{V\Delta t}{\Delta x}.$$
On vérifie qu'avec ce choix, on trouve bien
$$E = \mathcal{O}\big((\Delta t)^2\big) + \mathcal{O}\big((\Delta x)^2\big).$$

3. Pour étudier la stabilité en norme L^2 on utilise l'analyse de Fourier. On note

$$u^n(x) = u_j^n \text{ si } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$$

qui, par transformation de Fourier sur le segment $(0,1)$ avec conditions aux limites de périodicité, s'écrit

$$u^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}^n(k)\exp(2i\pi kx).$$

En appliquant cette transformation de Fourier au schéma on obtient

$$\hat{u}^{n+1}(k) = (\alpha\exp(-2i\pi k\Delta x) + \beta + \gamma\exp(2i\pi k\Delta x))\,\hat{u}^n(k) = A(k)\hat{u}^n(k).$$

Un calcul simple donne

$$|A(k)|^2 = 1 + 4c^2(c^2-1)\Big(\sin(\pi k\Delta x)\Big)^4.$$

La stabilité L^2 du schéma équivaut à $|A(k)| \leq 1$. Le schéma est donc stable L^2 sous une condition CFL du type

$$|c| = \frac{|V|\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Grâce au théorème de Lax, ce schéma étant consistant et stable est aussi convergent.

2 Sur la consommation des ménages (1/3 de la note)

1. Le problème

$$\max_{x\in I\!R^n_+,\ x\cdot p\leq b} u(x) \tag{4}$$

est équivalent à

$$-\left(\min_{x\in I\!R^n_+,\ x\cdot p\leq b} -u(x)\right), \tag{5}$$

où la fonction $-u$ est strictement convexe. Comme chaque prix est strictement positif, l'ensemble $\{x \in I\!R^n_+,\ x\cdot p \leq b\}$ est un convexe fermé borné non vide de $I\!R^n$. Par conséquent, il existe un unique point de minimum de (5), donc un unique vecteur $x(b)$ qui maximise (4).

2. Comme les contraintes sont affines elles sont toujours qualifiées. D'après le Théorème de Kuhn et Tucker la condition **nécessaire et suffisante** d'optimalité de (5) est : $\exists\lambda(b)\geq 0, \mu(b)\in I\!R^n_+$, tel que

$$\begin{aligned}
&-\mu(b) + \lambda(b)p - u'(x(b)) = 0,\\
&x(b)\cdot p \leq b,\ \lambda(b)\geq 0,\ \lambda(b)(p\cdot x(b) - b) = 0,\\
&x(b)\geq 0,\ \mu(b)\geq 0,\ \mu(b)\cdot x(b) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

On déduit de (6) que, si le ménage consomme effectivement la marchandise i, c'est-à-dire si $x_i(b) > 0$, alors $\mu_i(b) = 0$ et

$$\lambda(b) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x(b))}{p_i},$$

c'est-à-dire qu'à l'optimum $x(b)$ le gain marginal d'utilité, si le ménage consomme plus de marchandise i, rapporté à son prix p_i, est indépendant de i. Autrement dit, à l'optimum le rapport qualité-prix de toutes les marchandises consommées est le même pour ce ménage.

3. D'après le Théorème de Kuhn et Tucker, $(\lambda(b), \mu(b), x(b))$ est un point selle du Lagrangien

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu, x) = -u(x) + \lambda(p \cdot x - b) - \mu \cdot x,$$

c'est-à-dire que, pour tout $(\lambda, \mu, x) \in I\!R^+ \times I\!R^n_+ \times I\!R^n_+$,

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu, x(b)) \leq \mathcal{L}(\lambda(b), \mu(b), x(b)) \leq \mathcal{L}(\lambda(b), \mu(b), x). \tag{7}$$

On applique l'inégalité de droite de (7) à $x = x(b+\delta)$ et on en déduit, en tenant compte de (6),

$$-u(x(b)) \leq -u(x(b+\delta)) + \lambda(b)(p \cdot x(b+\delta) - b - \delta) + \lambda(b)\delta \leq -u(x(b+\delta)) + \lambda(b)\delta,$$

car $\lambda(b) \geq 0$, $p \cdot x(b+\delta) \leq b+\delta$, et $-\mu(b) \cdot x(b+\delta) \leq 0$. Comme $m(b) = u(x(b))$ on en déduit le résultat désiré

$$m(b+\delta) \leq m(b) + \lambda(b)\delta. \tag{8}$$

4. On déduit de (8) que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{m(b+\delta) - m(b)}{\delta} \leq \lambda(b) \text{ et } \lim_{\delta \to 0^-} \frac{m(b+\delta) - m(b)}{\delta} \geq \lambda(b).$$

Donc, si $b \mapsto m(b)$ est dérivable, on obtient

$$\lambda(b) = \frac{dm}{db}(b).$$

Economiquement, cela permet d'interpréter le multiplicateur de Lagrange $\lambda(b)$ comme le gain d'utilité par unité de budget supplémentaire.

3 Conditions de transmission dans les milieux inhomogènes (1/2 de la note)

1. On veut prouver l'inégalité

$$\int_\Omega a(x)|\nabla v(x)|^2 dx + \left(\int_{\Gamma_{int}} v(\gamma) d\gamma \right)^2 \geq C \int_\Omega v(x)^2 dx. \tag{9}$$

Si (9) est fausse, alors il existe une suite v_n dans $H^1(\Omega)$ telle que $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

$$\int_\Omega a(x)|\nabla v_n(x)|^2 dx + \left(\int_{\Gamma_{int}} v_n(\gamma) d\gamma\right)^2 \leq \frac{1}{n} \tag{10}$$

Par compacité (théorème de Rellich), on peut extraire une sous-suite, toujours notée v_n pour simplifier, telle que, lorsque $n \to +\infty$:

$$\begin{cases} (i) & v_n \longrightarrow v & \text{dans } L^2(\Omega), \\ (ii) & \nabla v_n \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega)^2, \\ (iii) & \displaystyle\int_{\Gamma_{int}} v_n(\gamma)\, d\gamma \longrightarrow 0 & \text{dans } I\!R. \end{cases}$$

De (i) et (ii), on tire en particulier que la suite v_n est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Par conséquent, $v_n \longrightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$ et $\nabla v = 0$. L'ouvert Ω étant connexe, v est constante (égale à c) dans Ω. Par passage à la limite dans $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, on déduit que la constante est non nulle $c \neq 0$. Par le théorème de traces, $v_n|_{\Gamma_{int}}$ converge vers $v|_{\Gamma_{int}}$ dans $L^2(\Gamma_{int})$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Gamma_{int}} v_n(\gamma)\, d\gamma = 2\pi c \neq 0,$$

ce qui est impossible d'après (iii).

2. Ceci résulte du lemme de Lax-Milgram ; la forme bilinéaire est continue en raison de la continuité de la trace de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\Gamma_{int})$, et coercive d'après la question précédente.

3. Supposons que u est suffisamment régulière dans Ω_1 et Ω_2 (typiquement H^2). Si $v \in H^1(\Omega)$ est à support compact dans Ω_i, $i = 1$ ou 2, par application de la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega_i} v \Delta u\, dx + \int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla u\, dx = \int_{\partial\Omega_i} v \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

on déduit de la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega_i} (a_i \Delta u(x) + f(x))\, v(x) dx = 0. \tag{11}$$

Par densité des fonctions régulières à support compact dans $L^2(\Omega_i)$ on obtient le résultat désiré. Si u est seulement H^1, le résultat reste vrai car ∇u admet une divergence faible dans L^2 (voir le polycopié pour les détails).

4. Prenant v à support d'intersection vide avec Ξ dans la formulation variationnelle, on a avec la formule de Green, compte tenu de la question précédente,

$$\int_{\Gamma_{int}} \left(a_1 \frac{\partial u}{\partial n}(\gamma) + \int_{\Gamma_{int}} u(\gamma')\, d\gamma'\right) v(\gamma)\, d\gamma + \int_{\Gamma_{ext}} a_2 \frac{\partial u}{\partial n}(\gamma)\, v(\gamma)\, d\gamma = 0. \tag{12}$$

Par densité des traces de fonctions de $H^1(\Omega)$ dans dans $L^2(\Gamma_{int})$ et $L^2(\Gamma_{ext})$, on déduit de l'égalité (12) les conditions aux limites

$$a_1 \frac{\partial u(\gamma)}{\partial n} + \int_{\Gamma_{int}} u(\gamma')\, d\gamma' = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{int}; \qquad a_2 \frac{\partial u(\gamma)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ext}. \tag{13}$$

5. Appliquant la formule de Green sur Ω_1 et Ω_2, compte tenu des questions précédentes, et notant que $n(\xi)$ est la normale extérieure à Ω_1, tandis que $-n(\xi)$ est la normale extérieure à Ω_2, il vient :

$$\int_\Xi \left(a_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}(\xi) - a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}(\xi) \right) v(\xi) d\xi = 0, \tag{14}$$

pour toute fonction v dans $H^1(\Omega)$, d'où l'on déduit la conservation des flux à l'interface

$$a_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}(\xi) = a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}(\xi), \quad \text{p.p. } \xi \in \Xi .$$

6. Soit v^n une suite de Cauchy dans $H^1_\Xi(\Omega)$, par définition de la norme dans $H^1_\Xi(\Omega)$:

$$\begin{cases} v^n \text{ est une suite de Cauchy dans } H^1(\Omega) \\ v^n_\Xi \text{ est une suite de Cauchy dans } H^1(\Xi) \end{cases}$$

Ces deux espaces étant complets, on en déduit que :

$$\begin{cases} v^n \longrightarrow v \text{ dans } H^1(\Omega) \\ v^n_\Xi \longrightarrow g \text{ dans } H^1(\Xi) \end{cases}$$

Par le théorème de traces sur Ξ on a

$$v^n_\Xi \longrightarrow v_\Xi \text{ dans } L^2(\Xi),$$

d'où l'on déduit que $v_\Xi = g$ sur Ξ, c'est-à-dire que v^n converge vers dans $H^1_\Xi(\Omega)$ qui est donc complet.

La continuité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ résulte de façon immédiate de la formule de Cauchy-Schwartz (dans Ω et sur Ξ) et du théorème de trace sur Γ_{int}.

Pour la coercivité, on remarque que d'après la question 1, il existe $C > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq C \left(\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^{2\pi} v'(\theta)^2 \, d\theta \right),$$

alors que, par ailleurs, grâce au théorème de trace sur Ξ on a

$$\int_0^{2\pi} v(\theta)^2 \, d\theta \leq C \|v\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

En combinant ces deux inégalités on obtient la coercivité de $a(u, u)$

$$a(u, u) \geq C \left(\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^{2\pi} v'(\theta)^2 \, d\theta + \int_0^{2\pi} v(\theta)^2 \, d\theta \right) \geq C \|v_\Xi\|^2_{H^1(\Xi)}.$$

On conclut en invoquant le théorème de Lax-Milgram.

7. Par le même type de calcul que celui effectué à la question 5, on a maintenant, moyennant une intégration par parties en θ

$$\int_{\Xi} \left(a_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}(\theta) - a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}(\theta) - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(\theta) \right) v(\theta) d\theta = 0, \tag{15}$$

d'où la condition de transmission

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(\theta) = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}(\theta) - a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}(\theta) \qquad \text{p.p.} \quad \theta \in \Xi. \tag{16}$$

L'équation (16) est une équation de conduction pour u sur l'interface Ξ où le terme source est la somme des flux en provenance de Ω_1 et Ω_2. L'interface Ξ est ici douée de propriétés intrinsèques de conduction. La deuxième formulation variationnelle du problème est donc un modèle qui couple des équations de conduction "volumiques" (dans Ω_1 et Ω_2) et une équation de conduction "surfacique" sur Ξ.