Ecole Polytechnique
Analyse numérique et optimisation, MAP431
Septembre 2003 (3 heures)
Eléments de corrigé
(Sujet proposé par G. Allaire)

1 Différences finies

On considère le schéma

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{4u_j^n-3u_{j-1}^n-u_{j+1}^n}{2\Delta x}=0. \tag{1}$$

1. On calcul l'erreur de troncature E du schéma (1), c'est-à-dire qu'on remplace u_j^n par $u(n\Delta t, j\Delta x)$ dans (1), et on effectue un développement de Taylor autour du point $(n\Delta t, j\Delta x)$. On obtient

$$E=\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\mathcal{O}(\Delta t+\Delta x).$$

Par conséquent, le schéma est consistant avec l'équation d'advection à la vitesse a. Autrement dit, (1) est une discrétisation de cette équation.

2. On réécrit le schéma (1) sous la forme

$$u_j^{n+1}=\left(1-2\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)u_j^n+\frac{3}{2}\frac{a\Delta t}{\Delta x}u_{j-1}^n+\frac{1}{2}\frac{a\Delta t}{\Delta x}u_{j+1}^n.$$

Si la condition CFL $2\frac{a\Delta t}{\Delta x}\leq 1$ est vérifée, alors u_j^{n+1} est une combinaison convexe de $u_j^n, u_{j-1}^n, u_{j+1}^n$, donc le schéma vérifie un principe du maximum discret. Il est donc stable en norme L^∞, et par le théorème de Lax, comme il est aussi consistant, il est convergent.

3. Pour étudier la stabilité L^2 du schéma, on utilise l'analyse de Fourier. On note

$$u^n(x)=u_j^n \text{ si } (j-1/2)\Delta x<x<(j+1/2)\Delta x$$

qui, par transformation de Fourier sur le segment $(0,1)$ avec conditions aux limites de périodicité, s'écrit

$$u^n(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{u}^n(k)\exp(2i\pi kx).$$

En appliquant cette transformation de Fourier au schéma (1) et en posant $\nu=\frac{a\Delta t}{\Delta x}$, on obtient

$$\hat{u}^{n+1}(k)=\Big(1-2\nu+2\nu\cos(2\pi k\Delta x)+i\nu\sin(2\pi k\Delta x)\Big)\hat{u}^n(k)=A(k)\hat{u}^n(k).$$

Un calcul facile montre que, en posant $\xi=\cos(2\pi k\Delta x)$,

$$|A(k)|^2=P(\xi)=3\nu^2\xi^2+4\nu(1-2\nu)\xi+\nu^2+(1-2\nu)^2.$$

Quand k varie dans $\mathbb{Z}$, ξ varie dans $[-1,+1]$ et il est clair que

$$\max_{\xi\in[-1,+1]} P(\xi) = \max\Big(P(1), P(-1)\Big) = \max\Big(1, (1-4\nu)^2\Big).$$

Par conséquent, $|A(k)| \leq 1$ pour tout k si la condition CFL $\nu \leq \frac{1}{2}$ est satisfaite (cette condition est aussi nécessaire si on prend k et dx tels que $\cos(2\pi k\Delta x) \approx -1$). Finalement, le schéma est stable L^2 sous la même condition CFL pour laquelle il est stable L^∞.

4. On reprend le développement de Taylor de la première question qui avait permis de voir que le schéma est d'ordre 1. Pour voir qu'il n'est pas d'ordre 2, on poursuit ce développement à l'ordre supérieur

$$E = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2).$$

Il faut prendre garde que pour une solution de l'équation d'advection, on a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. On en déduit donc l'erreur de troncature au deuxième ordre

$$E = a\Delta x\left(\frac{a\Delta t}{2\Delta x} - 1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2).$$

Ce terme ne peut pas s'annuler sous la condition CFL, donc le schéma n'est pas d'ordre 2.

2 Programmation linéaire

Pour un programme linéaire

$$\min_{x\geq 0, Ax=b} c\cdot x,$$

le dual est

$$\max_{\lambda, A^*\lambda\leq c} b\cdot\lambda.$$

Dans le cas présent le problème dual est

$$\max_{\lambda_1,\lambda_2} \lambda_1$$

sous les contraintes d'inégalité

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 2, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 6, \\ -\lambda_2 \leq 3, \\ 6\lambda_1 - 4\lambda_2 \leq 24, \\ -3\lambda_1 - 5\lambda_2 \leq 15. \end{cases}$$

Comme ce problème dual est en deux dimensions, on peut tracer un dessin (voir la Figure 1) pour trouver la solution qui est

$$\overline{\lambda}_1 = 3, \quad \overline{\lambda}_2 = -\frac{3}{2}.$$

Par ailleurs, ce sont uniquement les troisième et cinquième contraintes du dual qui sont saturées à l'optimum. Par conséquent, on déduit des conditions d'optimalité $\overline{x}\cdot(A^*\overline{\lambda}-c) = 0$ que nécessairement $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_4 = \overline{x}_6 = 0$. Il reste à caluler $\overline{x}_3$ et $\overline{x}_5$ en résolvant le système linéaire 2×2 issu de $Ax = b$. On trouve facilement $\overline{x}_3 = \frac{1}{6}$ et $\overline{x}_5 = \frac{1}{12}$.

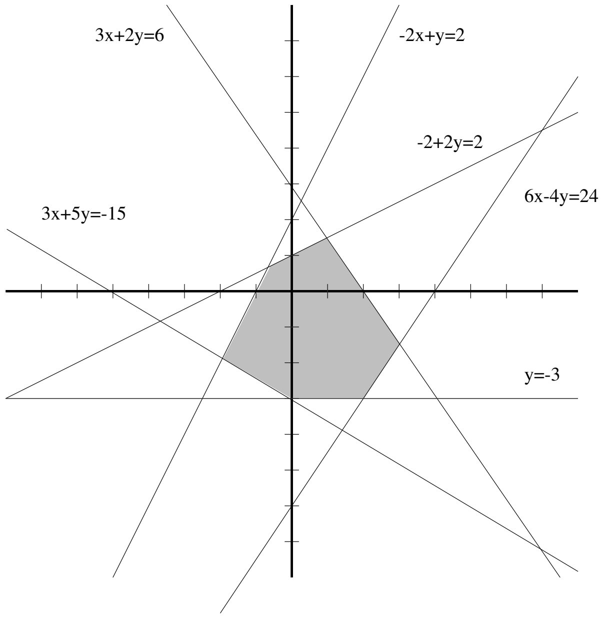

FIG. 1 – Résolution graphique du problème dual.

3 Système de Lamé

Soit Ω un ouvert borné régulier de $I\!R^2$. Soit μ et ν deux constantes réelles telles que

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad \nu \geq 0. \tag{2}$$

Soit la formulation variationnelle : trouver $u = (u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)^2$ tel que

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \nu \int_\Omega \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \tag{3}$$

pour tout $v = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega)^2$.

1.1 On vérifie les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram pour (3). Il est clair que

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)^2$, tandis que

$$a(u, v) = \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \nu \int_\Omega \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx$$

est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)^2$. Elle est aussi coercive car on déduit de (2) et de l'inégalité de Poincaré que

$$a(u, u) \geq \mu \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq C \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)^2} \quad \text{avec } C > 0.$$

Par conséquent, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)^2$ de (3).

1.2 Si l'on suppose que la solution u est régulière on peut intégrer par parties dans (3)

$$\int_\Omega \Big(\mu\Delta u + \nu\nabla(\mathrm{div} u) + f\Big)\cdot v\, dx = 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^2.$$

On en déduit donc que u est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - \nu\nabla(\mathrm{div} u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

(La condition aux limites de Dirichlet provient du fait que $u \in H_0^1(\Omega)^2$.) Si u n'est pas régulière, on peut tout de même faire cette intégration par parties et obtenir "au sens faible" le problème aux limites ci-dessus, c'est-à-dire que les égalités ont lieu au sens presque partout.

1.3 On remplace l'hypothèse (2) par

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad \mu + 2\nu \geq 0. \tag{4}$$

La seule difficulté est de prouver la coercivité de $a(u,u)$. On utilise la relation

$$|A|^2 = \left|A - \frac{tr(A)}{2} I\right|^2 + \frac{1}{2}|tr(A)|^2$$

pour toute matrice A avec la norme euclidienne $|A|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq 2} a_{ij}^2$. On en déduit

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(\mu|\nabla u - \frac{\mathrm{div} u}{2} I|^2 + (\nu + \frac{\mu}{2})|\mathrm{div} u|^2\right) dx \geq \min(\mu, \mu + 2\nu)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

ce qui prouve, par application de Lax-Milgram, que (3) admet encore une solution unique sous l'hypothèse (4).

On considère maintenant la formulation variationnelle : trouver $u = (u_1, u_2) \in X$ tel que

$$\mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \nu \int_\Omega \mathrm{div} u\, \mathrm{div} v\, dx = \int_\Omega f \cdot v\, dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot v\, ds \tag{5}$$

pour tout $v = (v_1, v_2) \in X$. On choisit d'abord $X = H^1(\Omega)^2$.

2.1 Comme $\nabla(u + C) = \nabla u$ et $\mathrm{div}(u + C) = \mathrm{div} u$, il est clair que si u est solution de (5), alors $u + C$ aussi.

2.2 Prenons $v = C$ dans (5) : la forme bilinéaire s'annule et comme C est un vecteur constant quelconque on en déduit la condition nécessaire

$$\int_\Omega f\, dx + \int_{\partial\Omega} g\, ds = 0.$$

2.3 En supposant la solution régulière, on peut intégrer par parties dans (5)

$$\int_\Omega \Big(\mu\Delta u + \nu\nabla(\mathrm{div} u) + f\Big)\cdot v\, dx = \int_{\partial\Omega}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \nu(\mathrm{div} u)n - g\right)\cdot v\, ds.$$

Comme $v \in H^1(\Omega)^2$ est quelconque, à l'intérieur et sur le bord de Ω, on en déduit que u est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - \nu\nabla(\mathrm{div} u) = f & \text{dans } \Omega, \\ \mu\frac{\partial u}{\partial n} + \nu(\mathrm{div} u)n = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.4 Pour démontrer l'existence et l'unicité (à l'addition d'une constante près) de la solution de (5) on modifie le choix de l'espace de Hilbert en prenant

$$X = \Big\{ v \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } \int_\Omega v\,dx = 0 \Big\}.$$

(On pourrait aussi prendre $X = \left(H^1(\Omega)/\mathbb{R}\right)^2$, c'est-à-dire les classes de fonctions définies à une constante près.) Grâce à la condition nécessaire sur f et g, la forme linéaire

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v\,dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot v\,ds$$

est la même sur X et sur $H^1(\Omega)^2$ (elle ne change pas si l'on ajoute une constante à v), et il s'agit donc bien d'une forme linéaire continue sur X. De même, $a(u,v)$ est bien une forme bilinéaire continue sur X. Pour montrer la coercivité de $a(u,u)$ on utilise l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir page 114 du polycopié)

$$\|u - m(u)\|_{L^2(\Omega)^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^4}$$

avec $m(u)$ la moyenne de u sur Ω. On obtient ainsi la coercivité sur X et donc l'existence et l'unicité dans X de la solution de (5).

On a désormais $X = \Big\{ u = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Big\}$.

3.1 Supposons que cette inégalité de Poincaré est fausse. Il existe donc (voir page 85 du polycopié) une suite $v_k \in X$ telle que

$$\|v_k\|_{L^2(\Omega)^2} = 1 > k \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)^4}.$$

La suite v_k est donc bornée dans $H^1(\Omega)^2$ et par le théorème de Rellich elle converge, à une sous-suite près, vers une limite dans $L^2(\Omega)^2$. Or ∇v_k converge vers 0 dans $L^2(\Omega)^4$. Donc, pour une sous-suite, v_k converge dans $H^1(\Omega)^2$ vers une limite qui ne peut être qu'une constante. Or v_k vérifie $v_k \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$, donc sa limite doit aussi vérifier cette condition, ce qui l'oblige, étant constante, à être nulle. C'est une contradiction avec le fait que $\|v_k\|_{L^2(\Omega)^2} = 1$.

3.2 Comme X est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)^2$, c'est un espace de Hilbert. Une fois prouvée l'inégalité de Poincaré, l'application du théorème de Lax-Milgram est immédiate, ce qui prouve l'existence et l'unicité de la solution de (5).

3.3 Pour tout $v \in X$ on a

$$\int_\Omega \Big(\mu\Delta u + \nu\nabla(\mathrm{div} u) + f \Big) \cdot v\,dx = \int_{\partial\Omega} \Big(\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \nu(\mathrm{div} u)n - g \Big) \cdot v\,ds.$$

Si on prend d'abord v à support compact dans Ω on obtient l'équation à l'intérieur

$$-\mu\Delta u - \nu\nabla(\mathrm{div} u) = f \quad \text{dans } \Omega.$$

Il reste donc

$$\int_{\partial\Omega} \Big(\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \nu(\mathrm{div} u)n - g \Big) \cdot v\,ds \quad \forall\, v \in X. \tag{6}$$

On note t le vecteur unité tangent à $\partial\Omega$ qui, avec n, forme une base orthonormale orientée de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $v \in X$ on a $v = (v \cdot t)t$ sur $\partial\Omega$ et on peut réécrire (6) sous la forme

$$\int_{\partial\Omega} \Big(\mu\frac{\partial u}{\partial n} + \nu(\mathrm{div} u)n - g \Big) \cdot t(v \cdot t)\,ds.$$

Or la composante tangentielle $(v \cdot t)$ est quelconque, donc le problème aux limites correspondant à (5) est

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - \nu\nabla(\mathrm{div} u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mu\frac{\partial u}{\partial n} \cdot t = g \cdot t & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Remarque : en toute rigueur il faudrait montrer qu'effectivement lorsque v parcourt X la composante tangentielle $(v \cdot t)$ décrit un sous-ensemble dense dans $L^2(\partial\Omega)$ (ce qui est vrai). On ne le fait pas ici puisque l'on demandait seulement un raisonnement formel.