Ecole Polytechnique
Analyse numérique et optimisation, MAP431
Septembre 2004 (3 heures)
Eléments de corrigé
(Sujet proposé par G. Allaire)

1 Différences finies

On considère le schéma

$$\frac{\alpha u_j^{n+1} + \beta u_j^n + \gamma u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0. \qquad (1)$$

1. On calcul l'erreur de troncature E du schéma (1), c'est-à-dire qu'on remplace u_j^n par $u(n\Delta t, j\Delta x)$ dans (1), et on effectue un développement de Taylor autour du point $(n\Delta t, j\Delta x)$. On obtient

$$E = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\Delta t} u + (\alpha - \gamma) \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x).$$

On rappelle que les coefficients α, β, γ ne dépendent pas de Δt et Δx. Par conséquent, le schéma est consistant avec l'équation de la chaleur si et seulement si

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \alpha - \gamma = 1.$$

2. Pour un schéma consistant on pousse le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 en commençant par la dérivée en espace. D'après le polycopié on sait que

$$\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ((n+1)\Delta t, j\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta x)^2.$$

Par conséquent, en développant en t on en déduit

$$\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (n\Delta t, j\Delta x) + \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} (n\Delta t, j\Delta x) + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2\right).$$

Finalement, l'erreur de troncature est

$$E = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha + \gamma}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2\right).$$

Or, en dérivant l'équation de la chaleur par rapport à t on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}.$$

Donc

$$E = \frac{\alpha + \gamma - 2}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2\right).$$

Le schéma est d'ordre 2 si et seulement si $\alpha + \gamma = 2$, et l'unique choix possible est $\alpha = 3/2$, $\beta = -2$, $\gamma = 1/2$ (schéma de Gear).

3. On choisit plutôt $\alpha = 1/2, \beta = 0, \gamma = -1/2$ (ce qui est tout de même un schéma consistant d'ordre 1). Dans ce cas la stabilité est évidente car, bien que le schéma soit a priori à 3 niveaux, il se comporte comme un schéma à 2 niveaux (u^{n+1} ne dépend que de u^{n-1}). Plus précisément, le schéma (1) est équivalent à deux schémas indépendants (l'un pour les n pairs, l'autre pour les n impairs) qui sont exactement le schéma implicite (2.3) du polycopié dont on sait qu'il est stable en norme L^2 ou en norme L^∞. Le schéma (1) est donc inconditionnellement stable, et comme il est consistant le théorème de Lax conclut qu'il est aussi convergent.

2 Formulation variationnelle

On définit l'espace

$$X = \Big\{ u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_e \Big\}.$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et un réel $\nu \geq 0$. On considère la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in X$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \nu \left(\int_{\Gamma_i} u \, n \, ds \right) \cdot \left(\int_{\Gamma_i} v \, n \, ds \right) = \int_\Omega f v \, dx \tag{2}$$

pour tout $v \in X$, où n est la normale unitaire extérieure au bord $\partial\Omega$.

1. On applique le théorème de Lax-Milgram à (2). Tout d'abord X est bien un espace de Hilbert. On vérifie sans peine que

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \nu \left(\int_{\Gamma_i} u \, n \, ds \right) \cdot \left(\int_{\Gamma_i} v \, n \, ds \right)$$

est une forme bilinéaire continue sur X grâce au théorème de trace sur Γ_i. De même,

$$L(v) = \int_\Omega f v \, dx$$

est une forme linéaire continue sur X. Pour vérifier la coercivité de a on écrit

$$a(u,u) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq C \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in X$$

grâce à l'inégalité de Poincaré dans X (voir la Remarque 4.3.18 du polycopié).
On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui donne l'existence et l'unicité de la solution de (2).

2. On suppose la solution de (2) suffisamment régulière pour pouvoir intégrer par parties. La formulation variationnelle (2) est donc équivalente à

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds + \nu \left(\int_{\Gamma_i} u \, n \, ds \right) \cdot \left(\int_{\Gamma_i} v \, n \, ds \right) = \int_\Omega (f + \Delta u) v \, dx. \tag{3}$$

On commence par prendre la fonction test v à support compact dans Ω. Dans ce cas les termes à gauche dans l'égalité (3) sont nuls et on en déduit

$$\int_\Omega (f + \Delta u) v \, dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

c'est-à-dire que $-\Delta u = f$ dans Ω. Par conséquent le terme de droite dans (3) est nul et, comme en plus $v = 0$ sur Γ_e, on en déduit que

$$\int_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \nu \left(\int_{\Gamma_i} u\, n\, ds \right) \cdot n \right) v\, ds = 0.$$

Comme la trace de v sur Γ_i est quelconque, on obtient que

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \nu \left(\int_{\Gamma_i} u\, n\, ds \right) \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_i,$$

qui est la condition aux limites recherchées. Au total le problème aux limites équivalent à (2) est

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_e \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \nu \left(\int_{\Gamma_i} u\, n\, ds \right) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_i \end{cases}$$

On a résolu ce problème aux limites au sens faible car toutes les égalités ont lieu au sens “presque partout”.

3. En utilisant une formule de Green pour les fonctions de $H^1(\mathcal{T})$ on a

$$\int_{\mathcal{T}} \nabla u\, dx = - \int_{\Gamma_i} u\, n\, ds$$

puisque $\partial \mathcal{T} = \Gamma_i$ et que n est la normale intérieure à $\mathcal{T}$. Par conséquent, (2) est équivalent à : trouver $u \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \nu \left(\int_{\mathcal{T}} \nabla u\, dx \right) \cdot \left(\int_{\mathcal{T}} \nabla v\, dx \right) = \int_{\Omega} f v\, dx$$

pour tout $v \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$.

4. On considère une autre formulation variationnelle : trouver $u \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \nu \int_{\mathcal{T}} \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_{\Omega} f v\, dx \tag{4}$$

pour tout $v \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$. Comme précédemment il est facile de vérifier que le théorème de Lax-Milgram s'applique à (4) qui admet donc une solution unique.

5. On définit la fonction caractéristique de Ω

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{T} \end{cases}$$

Il est facile alors de voir que (4) est équivalent au problème aux limites

$$\begin{cases} -\text{div} \left(\left(\chi + (1-\chi)\nu \right) \nabla u \right) = \chi f & \text{dans } \widetilde{\Omega} \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_e \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de transmission qui peut aussi se réécrire (voir la Section 5.2.3 du polycopié) en définissant

$$u_e \equiv u_{|\Omega}, \quad u_i \equiv u_{|\mathcal{T}}$$

comme

$$\begin{cases} -\Delta u_e = f & \text{dans } \Omega \\ -\Delta u_i = 0 & \text{dans } \mathcal{T} \\ u_e = 0 & \text{sur } \Gamma_e \\ u_e = u_i & \text{sur } \Gamma_i \\ \frac{\partial u_e}{\partial n} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_i \end{cases}$$

Si $\nu = 0$ (4) coincide avec (2), mais pas si $\nu > 0$.

3 Optimisation

On définit

$$J(x) = c \cdot x + \sum_{i=1}^{n} x_i \log \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \right)$$

et on considère le problème d'optimisation

$$\min_{x \in K,\ Ax=b} J(x). \tag{5}$$

1. La fonction $J(x)$ est est évidemment continue à l'intérieur de K, et les seules difficultés peuvent venir lorsque $x_i \to 0$. Cependant, on a

$$\lim_{x_i \to 0} x_i \log x_i = 0,$$

et pour $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1$

$$0 \leq -x_i \log \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \leq -\sum_{i=1}^{n} x_i \log \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \to 0 \text{ quand } x \to 0.$$

Donc J est aussi continue sur le bord de K.

2. Par hypothèse, on sait que pour toute colonne $j \in \{1, ..., n\}$ il existe un coefficient a_{ij} de A qui est strictement positif. On a donc pour tout $x \in K$ tel que $Ax = b$

$$0 \leq a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow 0 \leq x_j \leq \frac{b_i}{a_{ij}}$$

ce qui implique que l'ensemble $\{x \in K,\ Ax = b\}$ est borné. On minimise une fonction continue sur un fermé borné non vide de $\mathbb{R}^n$, donc il existe au moins une solution optimale de (5).

3. On vérifie sans problème que $J(tx) = tJ(x)$ pour tout $x \in K$ et tout $t > 0$. Etudions alors la convexité de J dans $K \cap \{\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$:

$$J(x) = c \cdot x + \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \quad \text{pour} \quad x \in K \cap \{\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\},$$

qui est une somme de fonctions convexes donc J est convexe dans $K \cap \{\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$. Passons au cas général dans K : il nous faut montrer que

$$J(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta J(x) + (1-\theta) J(y)$$

pour tout $x, y \in K$ et $\theta \in [0,1]$. On définit

$$X = \frac{x}{S} \text{ avec } S = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad Y = \frac{y}{T} \text{ avec } T = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \theta' = \frac{\theta S}{\theta S + (1-\theta)T}.$$

Grâce à l'homogénéité de degré 1 de J on obtient

$$\theta J(x)+(1-\theta)J(y)-J(\theta x+(1-\theta)y) = \theta S J(X)+(1-\theta)TJ(Y)-(\theta S+(1-\theta)T)J(\theta' X+(1-\theta')Y) \geq 0$$

à cause de la convexité de J sur $K \cap \{\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$.

4. On trouve que
$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = c_i + \log \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j},$$
ce qui implique que, si x ne tend pas vers 0,
$$\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial J}{\partial x_i} = -\infty.$$
Un développement de Taylor à l'ordre 1 montre donc qu'une solution optimale de (5) ne peut pas se trouver sur le bord de K en dehors de l'origine. Par ailleurs, 0 ne peut pas être solution car b est non nul.

5. Comme toute solution de (5) est à l'intérieur de K les multiplicateurs de Lagrange pour les contraintes $x_i \geq 0$ sont nuls. La condition nécessaire d'optimalité est donc qu'il existe un vecteur $x \in K$ et un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que
$$J'(x) + A^t \lambda = 0, \quad Ax = b, \quad x_i > 0.$$
Comme la fonction J ainsi que l'ensemble $\{x \in K,\ Ax = b\}$ sont convexes, cette condition d'optimalité est aussi suffisante.