CONCEPTION OPTIMALE DE STRUCTURES

G. ALLAIRE

3 Février 2010

CHAPITRE VI

OPTIMISATION GEOMETRIQUE (SUITE ET FIN)

"Stratégie" du cours

- On explique **une fois** la méthode rigoureuse pour calculer des dérivées de forme.
- C'est compliqué et un peu calculatoire...
- On présente à la fin une méthode formelle qui sera celle utilisée **en pratique**.
- C'est la méthode formelle, dite du Lagrangien, qu'il faut retenir.

Rappel: dérivation d'une fonction dépendant du domaine

Soit une fonction $u(\Omega, x)$ définie sur un domaine Ω.

Il existe deux notions de dérivée:

1) Dérivée eulérienne (ou de forme) U

$$u((\mathrm{Id}+\theta)\Omega_0, x) = u(\Omega_0, x) + U(\theta, x) + o(\theta) \quad , \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\|o(\theta)\|}{\|\theta\|} = 0$$

(définition locale non valable pour les points x sur le bord).

2) Dérivée lagrangienne (ou matérielle) Y

On définit la **transportée** $\overline{u}(\theta)$ sur Ω_0 par

$$\overline{u}(\theta, x) = u \circ (\mathrm{Id}+\theta) = u\Big((\mathrm{Id}+\theta)\Omega_0, x+\theta(x)\Big) \quad \forall\, x \in \Omega_0.$$

On obtient la dérivée lagrangienne Y en dérivant $\overline{u}(\theta, x)$

$$\overline{u}(\theta, x) = \overline{u}(0, x) + Y(\theta, x) + o(\theta) \quad , \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\|o(\theta)\|}{\|\theta\|} = 0 \,,$$

- On rappelle que

$$Y(\theta, x) = U(\theta, x) + \theta(x) \cdot \nabla u(\Omega_0, x).$$

- La dérivée eulérienne, quoique naturelle, est très délicate à utiliser et souvent formelle. Par exemple, si $u \in H_0^1(\Omega)$, l'espace de définition varie avec Ω... ou bien quelle condition aux limites vérifie la dérivée ?

- On recommande l'usage de la dérivée lagrangienne: on se ramène au domaine fixe Ω_0 et on dérive par rapport à θ. C'est la façon la plus sûre et la plus rigoureuse de calculer une dérivée de u, mais les calculs sont un peu lourds...

6.3.4 Dérivation d'une équation par rapport au domaine

Condition aux limites de Neumann.

Pour $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in H^2(\mathbb{R}^N)$ on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

qui admet une unique solution $u(\Omega) \in H^1(\Omega)$.

Sa formulation variationnelle est: trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi + u\phi)\, dx = \int_\Omega f\phi\, dx + \int_{\partial\Omega} g\phi\, ds \quad \forall\, \phi \in H^1(\Omega).$$

Proposition 6.34. On définit le changement de variable $x = y + \theta(y)$ avec $y \in \Omega_0$ et $x \in \Omega$ et la transportée $\overline{u}(\theta) \in H^1(\Omega_0)$ par

$$\overline{u}(\theta)(y) = u(\Omega)(x) = u\big((\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega_0)\big) \circ (\,\mathrm{Id} + \theta)(y).$$

L'application $\theta \to \overline{u}(\theta)$, de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\Omega_0)$, est différentiable en 0, et sa dérivée dans la direction θ, appelée dérivée Lagrangienne, est

$$Y = \langle \overline{u}'(0), \theta \rangle,$$

où $Y \in H^1(\Omega_0)$ est la solution unique de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta Y + Y = -\Delta(\nabla u(\Omega_0) \cdot \theta) + \nabla u(\Omega_0) \cdot \theta & \text{dans } \Omega_0 \\ \dfrac{\partial Y}{\partial n} = (\nabla \theta + (\nabla \theta)^t) \nabla u(\Omega_0) \cdot n + \nabla g \cdot \theta - g(\nabla \theta n \cdot n) & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{array} \right.$$

Démonstration. On fait le changement de variable $x = y + \theta(y)$ avec $y \in \Omega_0$ dans la formulation variationnelle. On pose $\psi(y) = \phi(x)$ et on obtient:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} A(\theta)\nabla\overline{u}\cdot\nabla\psi\, dy \quad & + \int_{\Omega_0} \overline{u}\psi|\det(I+\nabla\theta)|dy \\ & = \int_{\Omega_0} f\circ(\,\mathrm{Id}+\theta)\,\psi|\det(I+\nabla\theta)|dy \\ & + \int_{\partial\Omega_0} g\circ(\,\mathrm{Id}+\theta)\,\psi|\det(I+\nabla\theta)|\,|\,(I+\nabla\theta)^{-t}n\,|\,ds\end{aligned}$$

avec $A(\theta) = |\det(I+\nabla\theta)|(I+\nabla\theta)^{-1}\left((I+\nabla\theta)^{-1}\right)^t$.

On dérive par rapport à θ en 0.

Le seul nouveau terme est l'intégrale de bord qui se dérive comme dans la démonstration de la Proposition 6.24.

On pose $Y = \langle \overline{u}'(0), \theta \rangle$ et on obtient

$$\int_{\Omega_0} (\nabla Y \cdot \nabla \psi + Y\psi)\, dy + \int_{\Omega_0} \big(\mathrm{div}\theta\, I - \nabla\theta - (\nabla\theta)^t \big) \nabla\overline{u} \cdot \nabla\psi \, dy$$
$$+ \int_{\Omega_0} \overline{u}\psi \, \mathrm{div}\theta \, dy = \int_{\Omega_0} \mathrm{div}(f\theta)\psi \, dy$$
$$+ \int_{\partial\Omega_0} \big(\nabla g \cdot \theta + g \big(\mathrm{div}\theta - \nabla\theta n \cdot n \big) \big) \psi ds$$

On utilise alors les relations $\overline{u}(0) = u(\Omega_0) = u$, $\Delta u = u - f$ dans Ω_0 et $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur $\partial\Omega_0$, et l'identité

$$\Delta (\nabla v \cdot \theta) = \mathrm{div} \big((\Delta v)\theta - (\mathrm{div}\theta)\nabla v + (\nabla\theta + (\nabla\theta)^t)\nabla v \big) ,$$

pour en déduire le résultat. Simple dans le principe mais calculatoire...

Corollaire 6.36. La dérivée eulérienne U de la solution $u(\Omega)$, définie par

$$U = Y - \nabla u(\Omega_0) \cdot \theta,$$

est solution dans $H^1(\Omega_0)$ de

$$-\Delta U + U = 0 \quad \text{dans } \Omega_0.$$

et vérifie la condition aux limites

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \theta \cdot n \left(\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial^2 u(\Omega_0)}{\partial n^2} \right) + \nabla_t(\theta \cdot n) \cdot \nabla_t u(\Omega_0) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_0,$$

avec la notation du gradient tangentiel $\nabla_t \phi = \nabla \phi - (\nabla \phi \cdot n) n$.

Démonstration. Calcul facile mais fastidieux.

6.4 Gradient et condition d'optimalité

On considère le problème suivant d'optimisation de formes

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega),$$

avec $\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega = (\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega_0) \text{ et } \int_\Omega dx = V_0 \right\}$. La fonction coût $J(\Omega)$ est soit la compliance, soit un critère de moindres carrés pour obtenir un déplacement cible $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$J(\Omega) = \int_\Omega f u \, dx + \int_{\partial\Omega} g u \, ds \quad \text{ou} \quad J(\Omega) = \int_\Omega |u - u_0|^2 dx.$$

La fonction $u(\Omega)$ est la solution dans $H^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Gradient et condition d'optimalité

Théorème 6.38. L'application $J(\Omega) = \int_\Omega |u - u_0|^2 dx$ est différentiable

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(|u - u_0|^2 + \nabla u \cdot \nabla p + p(u - f) - \frac{\partial(gp)}{\partial n} - Hgp \right) ds,$$

où p est l'état adjoint, solution unique dans $H^1(\Omega_0)$ de

$$\begin{cases} -\Delta p + p = -2\,(u - u_0) & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0, \end{cases}$$

On retrouve bien que la dérivée de forme ne dépend que de la valeur de la trace normale du champ de vecteurs θ sur le bord.

Preuve. On applique la Proposition 6.28 à la fonction coût pour obtenir

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \left(|u(\Omega_0) - u_0|^2 \operatorname{div}\theta + 2(u(\Omega_0) - u_0)(Y - \nabla u_0 \cdot \theta) \right) dx,$$

ou bien, avec $U = Y - \nabla u(\Omega_0) \cdot \theta$,

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \left[\operatorname{div} \left(\theta |u(\Omega_0) - u_0|^2 \right) + 2(u(\Omega_0) - u_0) U \right] dx.$$

On multiplie l'équation adjointe par U

$$\int_{\Omega_0} (\nabla p \cdot \nabla U + pU) \, dy = -2 \int_{\Omega_0} (u(\Omega_0) - u_0) \, U \, dy,$$

puis l'équation de U par p

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (\nabla p \cdot \nabla U + pU) \, dy \; &= \\ \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n & \left(-\nabla u(\Omega_0) \cdot \nabla p - p \Delta u(\Omega_0) + \frac{\partial (gp)}{\partial n} + Hgp \right) ds. \end{aligned}$$

On en déduit, par comparaison, le résultat.

Le cas de la compliance (auto-adjoint)

Théorème 6.40. L'application $J(\Omega) = \int_\Omega f u \, dx + \int_{\partial\Omega} g u \, ds$ est différentiable

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(-|\nabla u(\Omega_0)|^2 - |u(\Omega_0)|^2 + 2u(\Omega_0) f \right) ds$$

$$+ \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(2 \frac{\partial(g u(\Omega_0))}{\partial n} + 2Hg u(\Omega_0) \right) ds,$$

Interprétation: supposons $f = 0$ et $g = 0$ là où $\theta \cdot n \neq 0$. La formule se simplifie

$$J'(\Omega_0)(\theta) = -\int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(|\nabla u|^2 + u^2 \right) ds \leq 0$$

On a toujours intérêt à agrandir le domaine (i.e. $\theta \cdot n > 0$) pour diminuer la compliance.

Preuve. On applique la Proposition 6.28 à la fonction coût pour obtenir

$$\begin{aligned} J'(\Omega_0)(\theta) = & \int_{\Omega_0} (f u \,\mathrm{div}\theta + u\theta \cdot \nabla f + fY)\, dx \\ & + \int_{\partial\Omega_0} (gu\,(\,\mathrm{div}\theta - \nabla\theta n \cdot n) + u\theta \cdot \nabla g + gY)\, ds, \end{aligned}$$

ou bien, avec $U = Y - \nabla u \cdot \theta$,

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} (\,\mathrm{div}(fu\theta) + fU)\, dx + \int_{\partial\Omega_0} \left(\theta \cdot n \left(\frac{\partial(gu)}{\partial n} + Hgu \right) + gU \right) ds.$$

On multiplie l'équation pour u par U et celle pour U par u et on compare, ce qui donne le résultat.

Remarque. Même type de résultats pour une condition aux limites de Dirichlet (mais formules différentes).

6.4.3 Dérivation rapide: méthode du Lagrangien

- Les calculs précédents sont un peu lourds... mais on peut faire plus rapide (mais formel et parfois délicat) grâce à la méthode du Lagrangien (proposée dans ce contexte par J. Céa).
- Le Lagrangien permet aussi de trouver la définition de l'état adjoint.
- C'est facile pour les conditions aux limites de Neumann et un peu plus compliqué pour celles de Dirichlet.
- C'est la méthode qu'il faut connaitre !

Dérivation rapide pour des conditions aux limites de Neumann

Si la fonction objectif est

$$J(\Omega) = \int_\Omega j(u(\Omega))\, dx,$$

le Lagrangien est défini comme la somme de J et de la formulation variationnelle de l'équation d'état

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_\Omega j(v)\, dx + \int_\Omega \Big(\nabla v \cdot \nabla q + vq - fq \Big) dx - \int_{\partial\Omega} gq\, ds,$$

avec v et $q \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Il est important de noter que l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$ ne dépend pas de Ω et donc les trois variables du Lagrangien $\mathcal{L}$ sont véritablement indépendantes.

La dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à q dans la direction $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\Omega, v, q), \phi \rangle = \int_\Omega \Big(\nabla v \cdot \nabla \phi + v\phi - f\phi \Big) dx - \int_{\partial\Omega} g\phi \, ds,$$

qui, en s'annulant, redonne la formulation variationnelle de l'équation d'état.

La dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à v dans la direction $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, v, q), \phi \rangle = \int_\Omega j'(v)\phi \, dx + \int_\Omega \Big(\nabla \phi \cdot \nabla q + \phi q \Big) dx,$$

qui, en s'annulant, donne la formulation variationnelle de l'équation adjointe.

La dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport au domaine, dans la direction θ, est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, v, q)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \left(j(v) + \nabla v \cdot \nabla q + vq - fq - \frac{\partial (gq)}{\partial n} - Hgq \right) ds.$$

Lorsqu'on évalue cette dérivée avec l'état $u(\Omega_0)$ et l'état adjoint $p(\Omega_0)$, on trouve exactement la dérivée de la fonction objectif

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}\Big(\Omega_0, u(\Omega_0), p(\Omega_0)\Big)(\theta) = J'(\Omega_0)(\theta)}$$

En effet, si on dérive la relation

$$\mathcal{L}(\Omega, u(\Omega), q) = J(\Omega) \quad \forall\, q \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

en utilisant la règle de dérivation composée, il vient

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u(\Omega_0), q)(\theta) + \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega_0, u(\Omega_0), q), u'(\Omega_0)(\theta) \rangle$$

Si on prend $q = p(\Omega_0)$, alors le dernier terme est nul puisque $p(\Omega_0)$ est solution de l'équation adjointe.

Grâce à ce calcul on peut obtenir le “bon” résultat pour $J'(\Omega_0)$ sans passer par les dérivées de forme ou matérielle.

Cependant, ce calcul rapide de la dérivée $J'(\Omega_0)$ n'est valable que si l'on connait la dérivabilité de u par rapport au domaine.

Dérivation rapide pour des conditions aux limites de Dirichlet

C'est plus compliqué ! Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Le Lagrangien "habituel" est

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_\Omega j(v)\, dx + \int_\Omega \Big(\nabla v \cdot \nabla q - f q \Big) dx,$$

pour $v, q \in H_0^1(\Omega)$. Les variables (Ω, v, q) ne sont pas indépendantes !

En effet, les fonctions v et q vérifient

$$v \;=\; q \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Il faut introduire un autre Lagrangien.

Lagrangien pour des conditions aux limites de Dirichlet

On pénalise la condition aux limites de Dirichlet

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q, \lambda) = \int_\Omega j(v)\, dx - \int_\Omega (\Delta v + f) q\, dx + \int_{\partial\Omega} \lambda v\, ds$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange pour la C.L. On peut dériver car on a désormais 4 variables indépendantes et $v, q, \lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

On a bien

$$\sup_{q,\lambda} \mathcal{L}(\Omega, v, q, \lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega j(u)\, dx = J(\Omega) & \text{si } v \equiv u, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition du Lagrangien on trouve que:

la dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à q dans la direction $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\Omega, v, q, \lambda), \phi \rangle = -\int_\Omega \phi \Big(\Delta v + f \Big) dx,$$

qui, en s'annulant, redonne l'équation d'état,

la dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à λ dans la direction $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\Omega, v, q, \lambda), \phi \rangle = \int_{\partial\Omega} \phi v \, dx,$$

qui, en s'annulant, redonne la condition aux limites de Dirichlet pour l'équation d'état.

Pour calculer la dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à v, on fait une première intégration par parties

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q, \lambda) = \int_\Omega j(v)\, dx + \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla q - f q)\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\lambda v - \frac{\partial v}{\partial n} q \right) ds,$$

puis une seconde intégration par parties

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q, \lambda) = \int_\Omega j(v)\, dx - \int_\Omega (v \Delta q - f q)\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\lambda v - \frac{\partial v}{\partial n} q + \frac{\partial q}{\partial n} v \right) ds.$$

On peut alors dériver dans la direction $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, v, q), \phi \rangle = \int_\Omega j'(v) \phi\, dx - \int_\Omega \phi \Delta q\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(-q \frac{\partial \phi}{\partial n} + \phi \left(\lambda + \frac{\partial q}{\partial n} \right) \right) ds$$

qui, en s'annulant, donne trois relations dont les deux premières redonnent le problème aux limites adjoint.

1. Si ϕ est à support compact dans Ω_0, on obtient

$$-\Delta p = -j'(u) \quad \text{dans} \quad \Omega_0.$$

2. Si $\phi = 0$ sur $\partial\Omega_0$ avec $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ quelconque dans $L^2(\partial\Omega_0)$, on a

$$p = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_0.$$

3. Si ϕ est quelconque dans $H^1(\Omega_0)$, on trouve

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \lambda = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_0.$$

On a bien retrouvé le problème adjoint et en plus on a caractérisé le multiplicateur de Lagrange optimal λ.

Finalement, la dérivée partielle de forme est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u, p, \lambda)(\theta) = \int_{\partial \Omega_0} \theta \cdot n \Big(j(u) - (\Delta u + f)p + \frac{\partial (u\lambda)}{\partial n} + H u \lambda \Big) ds$$

Sachant que $u = p = 0$ sur $\partial \Omega_0$ et $\lambda = -\frac{\partial p}{\partial n}$ on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u, p, \lambda)(\theta) = \int_{\partial \Omega_0} \theta \cdot n \Big(j(0) - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial n} \Big) ds = J'(\Omega_0)(\theta)$$

$$\boxed{J'(\Omega_0)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}\Big(\Omega_0, u(\Omega_0), p(\Omega_0)\Big)(\theta)}$$

Cette formule n'est pas une surprise car, si on dérive

$$\mathcal{L}(\Omega, u(\Omega), q, \lambda) = J(\Omega) \quad \forall q, \lambda,$$

il vient

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u(\Omega_0), q, \lambda)(\theta) + \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega_0, u(\Omega_0), q, \lambda), u'(\Omega_0)(\theta) \rangle.$$

En prenant alors $q = p(\Omega_0)$ (solution de l'équation adjointe) et $\lambda = -\frac{\partial p}{\partial n}(\Omega_0)$, le dernier terme s'annule et on obtient précisément la formule cherchée.

Application: la compliance

On minimise $J(\Omega) = \int_\Omega f u \, dx$ avec $u \in H^1_0(\Omega)$ solution de

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall \, \phi \in H^1_0(\Omega).$$

L'état adjoint est simplement $p = -u$. La dérivée de forme vaut

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \Big(f u - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial p}{\partial n} \Big) ds = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 ds \leq 0$$

On a toujours intérêt à rétrécir le domaine (i.e. $\theta \cdot n < 0$) pour diminuer la compliance.

C'est le contraire des C.L. de Neumann, mais c'est normal !

Autre exemple: le tambour

On optimise la forme d'un tambour (une membrane élastique) afin qu'il produise le son le plus grave possible. Soit la valeur propre $\lambda(\Omega)$ (le carré de la fréquence) et le mode propre $u(x)$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(\Omega) u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le mode fondamental est la plus petite valeur propre qui est aussi donnée par

$$\lambda(\Omega) = \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

On étudie donc

$$\inf_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} \left(\lambda(\Omega) + \ell \int_\Omega dx \right),$$

où $\ell \geq 0$ est un multiplicateur de Lagrange fixé pour une contrainte sur l'aire de la membrane.

Dérivation eulérienne

Pour une fonction test ϕ à support compact $\omega \subset \Omega$ on dérive

$$\int_\omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda(\Omega) \int_\omega u\phi \, dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_\omega \nabla U \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda(\Omega) \int_\omega U\phi \, dx + \Lambda \int_\omega u\phi \, dx,$$

où $\Lambda = \lambda'(\Omega)(\theta)$ est la dérivée de la valeur propre (supposée simple).

$$\Rightarrow \quad -\Delta U - \lambda(\Omega) U = \Lambda u \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour obtenir la condition aux limites pour U on dérive

$$\int_{\partial\Omega} u\psi \, ds = 0 \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\partial\Omega} \left(U\psi + \theta \cdot n \left(\frac{\partial(u\psi)}{\partial n} + Hu\psi \right) \right) ds = 0,$$

ce qui donne $U = -\frac{\partial u}{\partial n} \theta \cdot n$ puisque $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

En multipliant l'équation pour U par u et en intégrant par parties on obtient

$$\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla u \, dx = \lambda \int_\Omega U u \, dx + \Lambda \int_\Omega u^2 \, dx.$$

En multipliant l'équation pour u par U et en intégrant par parties on obtient

$$\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla u \, dx = \lambda \int_\Omega U u \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} U \, ds.$$

On en déduit

$$\Lambda \int_\Omega u^2 dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} U \, ds = - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \theta \cdot n \, ds.$$

La dérivée de la fonction objectif est (problème auto-adjoint)

$$J'(\Omega)(\theta) = \Lambda + \ell \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \, ds = \int_{\partial\Omega} \left(\ell - \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2}{\int_\Omega u^2 dx} \right) \theta \cdot n \, ds.$$

Si $\ell = 0$ on a $J'(\Omega)(\theta) \leq 0$ dès que $\theta \cdot n \geq 0$, c'est-à-dire que l'on minimise $J(\Omega)$ si on agrandit le domaine Ω.

Méthode du Lagrangien

On introduit le Lagrangien pour $\mu \in \mathbb{R}$, $v, q, z \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{L}(\Omega, \mu, v, q, z) = \mu - \int_\Omega (\Delta v + \mu v) q \, dx + \int_{\partial\Omega} z v \, ds$$

où z est le multiplicateur de Lagrange pour la C.L. On peut dériver car on a 5 variables indépendantes.

La dérivée partielle $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$ redonne l'équation d'état.

La dérivée partielle de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$ redonne la condition aux limites de Dirichlet pour l'équation d'état.

La dérivée partielle de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0$ donne trois relations dont l'adjoint:

$$-\Delta p = \lambda p \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad p = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad \frac{\partial p}{\partial n} + z = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

La dérivée partielle de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0$ donne

$$\int_\Omega up\, dx = 1$$

Or, si la valeur propre λ est simple, p est un multiple de u. Donc

$$p = \frac{u}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

Finalement, la dérivée partielle de forme est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, \lambda, u, p, z)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \Big(p\Delta u + \lambda p u + \frac{\partial (uz)}{\partial n} + Huz \Big) ds$$

Sachant que $u = p = 0$ sur $\partial\Omega$ et $z = -\frac{\partial p}{\partial n}$ on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, \lambda, u, p, z)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \Big(-\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial p}{\partial n} \Big) ds = J'(\Omega)(\theta)$$

6.5 Algorithmes numériques pour l'élasticité

Frontière variable Γ. Frontières fixes Γ_N et Γ_D.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma = 2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

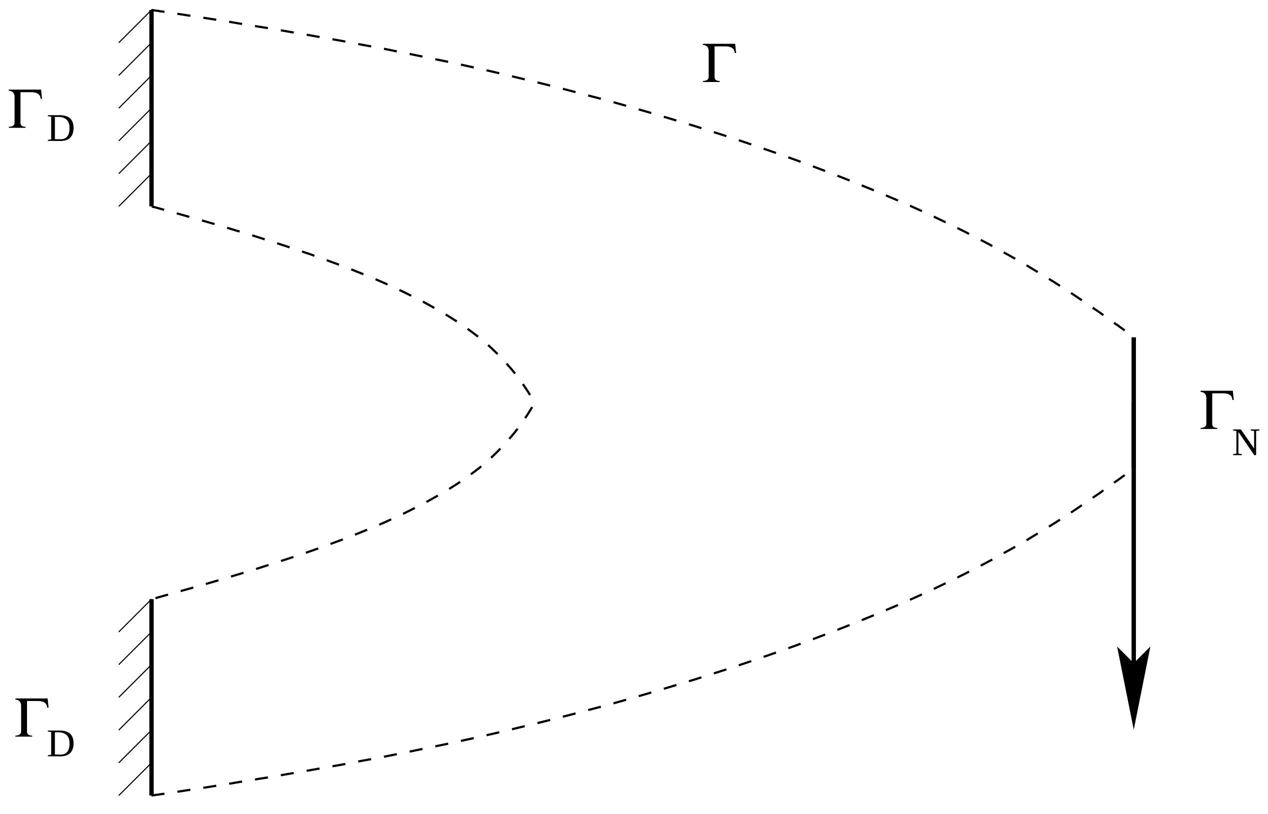
avec $e(u) = (\nabla u + (\nabla u)^t)/2$. On minimise la compliance

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, dx.$$

Dans ce cas (auto-adjoint) on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = -\int_{\Gamma} \theta \cdot n \left(2\mu |e(u)|^2 + \lambda (\operatorname{tr} e(u))^2\right) ds.$$

Conditions aux limites pour une console élastique: Γ_D est le bord vertical gauche, Γ_N le bord vertical droit, et Γ, en pointillé, le reste.



Principes du calcul

On se donne Ω_0. On calcule une suite de domaines Ω_k qui vérifient les contraintes suivantes

$$\partial\Omega_k = \Gamma_k \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$$

où Γ_N et Γ_D sont fixes, et le volume (ou poids) est fixe

$$V(\Omega_k) = \int_{\Omega_k} dx = V(\Omega_0).$$

Pour prendre en compte la contrainte que seul Γ varie, il suffit de prendre $\theta \cdot n = 0$ sur $\Gamma_N \cup \Gamma_D$.

A cause de la contrainte sur le volume de la forme on utilise un algorithme de gradient à pas fixe avec projection.

La dérivée de la contrainte de volume est $V'(\Omega_k)(\theta) = \displaystyle\int_{\Gamma_k} \theta \cdot n$.

Algorithme

Soit $t > 0$ un pas de descente fixé. On calcule une suite $\Omega_k \in \mathcal{U}_{ad}$ par

1. Initialisation de la forme Ω_0.

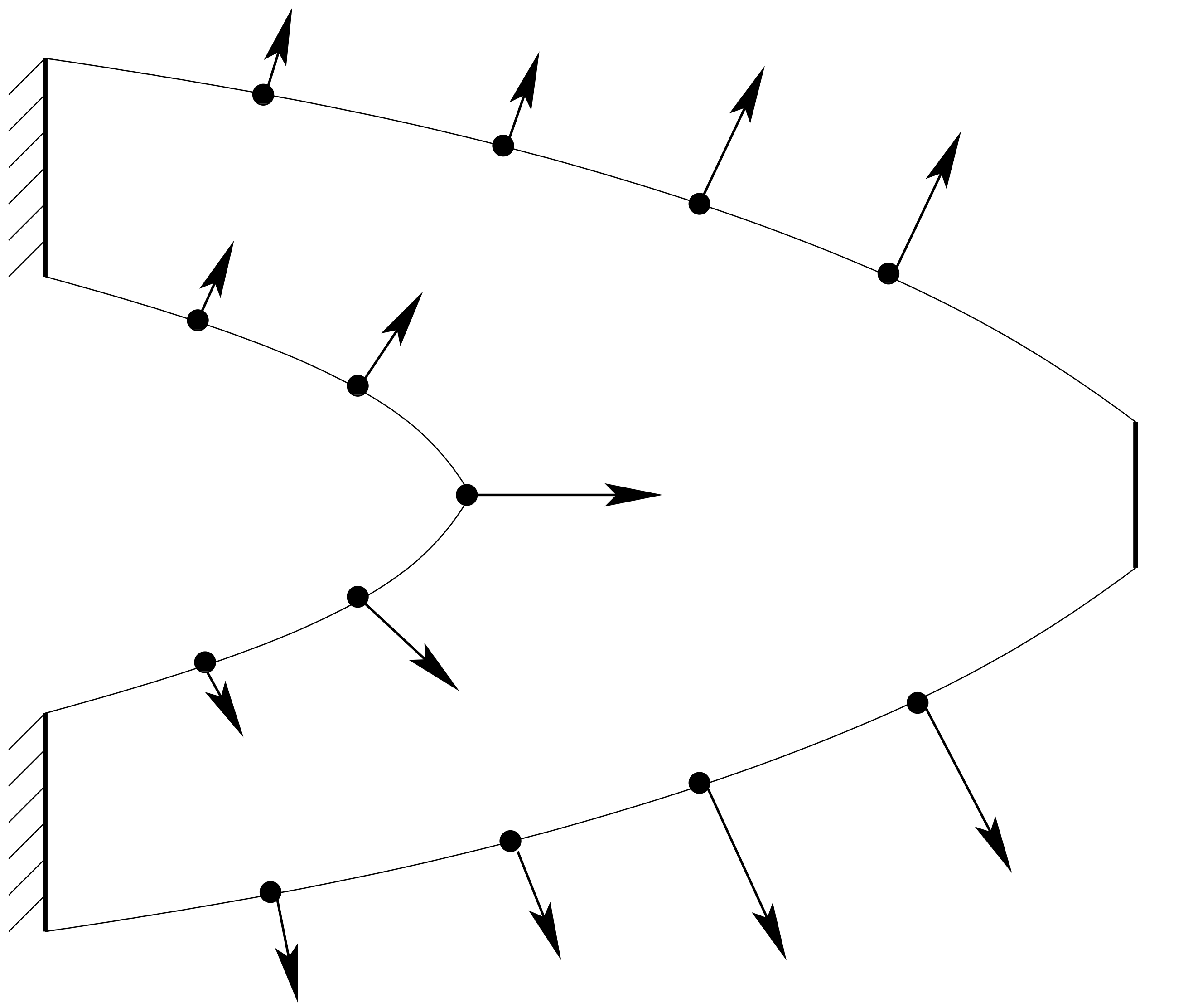
2. Itérations jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:

$$\Omega_{k+1} = (\,\mathrm{Id} + \theta_k)\Omega_k \quad \text{avec} \quad \theta_k = t(j_k - \ell_k)n,$$

   où n est le vecteur normal au bord $\partial\Omega_k$ et $\ell_k \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange tel que Ω_{k+1} satisfasse la contrainte de volume. La dérivée est donnée sur le bord Γ_k par

$$J'(\Omega_k)(\theta) = -\int_\Gamma \theta \cdot n\, j_k\, ds \quad \text{avec} \quad j_k = 2\mu|e(u_k)|^2 + \lambda(\,\mathrm{tr}\, e(u_k))^2$$

   où u_k est la solution de l'équation d'état dans le domaine Ω_k.



Déformation de maillage

Pour changer la forme il faut pouvoir remailler automatiquement à chaque itération, ou bien déformer le maillage à chaque itération.

- Champ de déplacement θ proportionnel à n (normale au bord), défini uniquement sur le bord.
- On préfère déformer le maillage (c'est moins cher).
- Dans ce cas il faut étendre θ à l'intérieur.
- Il faut vérifier que les bords déplacés ne se croisent pas...
- Néanmoins il faut remailler régulièrement (c'est cher).
- Ce sont souvent les contraintes géométriques qui stoppent l'algorithme.

La mise en oeuvre informatique de l'optimisation géométrique est compliquée, **surtout en 3-d**.

Extension du champ de déplacement

$$J'(\Omega)(\theta) + \ell V'(\Omega)(\theta) = \int_\Gamma (\ell - j)\, \theta \cdot n \, ds$$

Une première possibilité pour étendre $(\ell - j)n$ à l'intérieur est

$$\begin{cases} -\Delta\theta = 0 & \text{dans } \Omega \\ \theta = t(j-\ell)n & \text{sur } \Gamma \\ \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N \end{cases}$$

On préfère en profiter pour régulariser (en plus) en résolvant

$$\begin{cases} -\Delta\theta = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\theta}{\partial n} = t(j-\ell)n & \text{sur } \Gamma \\ \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N \end{cases}$$

En effet, $j = 2\mu|e(u)|^2 + \lambda\,\mathrm{tr}(e(u))^2$ (pour la compliance) peut être peu régulier (pas mieux que $L^1(\Omega)$) alors qu'on a toujours supposé $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$).

Cela peut entrainer une oscillation de la frontière.

Typiquement, θ admet un ordre de dérivation de plus que j et on vérifie que c'est bien une direction de descente car

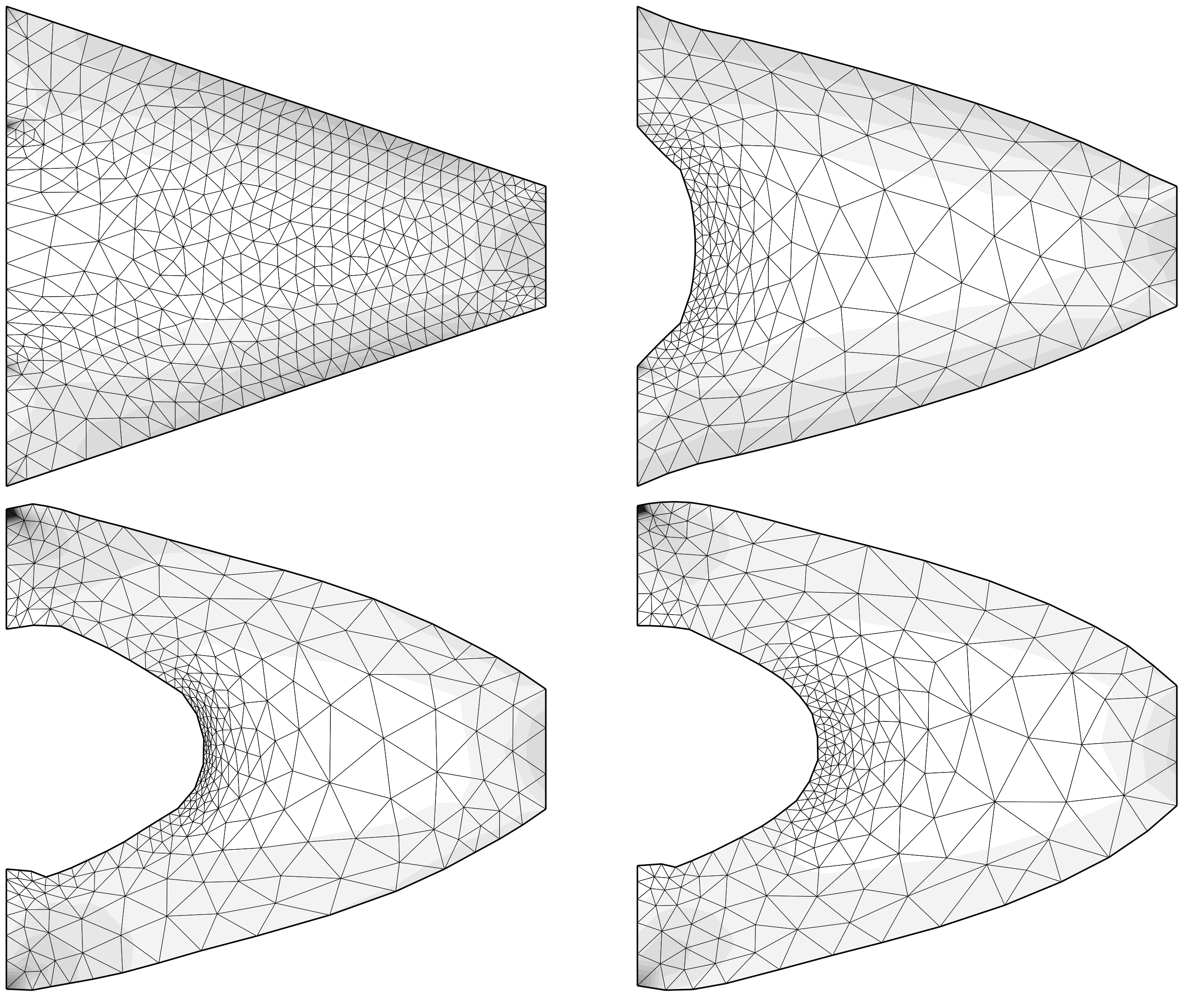
$$-\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx = t\int_\Gamma (\ell - j)\,\theta\cdot n\,ds$$

Détails techniques

- ☞ Pour vérifier la contrainte de poids total on ajuste “a posteriori” le multiplicateur de Lagrange $\ell_k \in \mathbb{R}$. Le poids n'est donc pas fixe mais converge vers la valeur désirée.
- ☞ On revient en arrière en diminuant le pas $t > 0$ si $J(\Omega)$ augmente.
- ☞ Pour éviter d'éventuelles oscillations du bord ainsi que du bruit “numérique”, on utilise 2 maillages: un fin pour évaluer avec précision u et p, un grossier qui est celui que l'on déplace.

Calculs FreeFem++ ; programmes disponibles sur la page web
`http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_annee3.html`

Résultats numériques: initialisation et itérations 5, 10, 20



Influence de la topologie initiale