

CONCEPTION OPTIMALE DE STRUCTURES

G. ALLAIRE

17 Février 2010

CHAPITRE VII (SUITE)

OPTIMISATION TOPOLOGIQUE PAR
HOMOGENEISATION

Rappel des épisodes précédents

1. Optimisation topologique versus optimisation géométrique
2. Méthode d'homogénéisation dans le cas périodique
3. Matériaux composites: la classe **explicite** des laminés séquentiels

Il nous reste à faire:

- ➡ Caractériser l'ensemble G_θ des composites
- ➡ Application à l'optimisation de formes
- ➡ Algorithmes numériques d'optimisation topologique

7.3.4 Caractérisation variationnelle des coefficients homogénéisés

On suppose que le tenseur microscopique $A(y)$ est **symétrique**. Alors A^* est aussi symétrique.

De plus A^* est caractérisé par le principe variationnel

$$A^* \xi \cdot \xi = \min_{w \in H_{\#}^1(Y)/\mathbf{R}} \int_Y A(y) (\xi + \nabla w) \cdot (\xi + \nabla w) dy$$

En effet, si w_ξ est le minimiseur, alors il vérifie l'équation d'Euler

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A(y) (\xi + \nabla w_\xi(y)) \right) = 0 & \text{dans } Y \\ y \rightarrow w_\xi(y) & Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Par linéarité on voit que $w_\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i w_i$ et donc

$$\int_Y A(y) (\xi + \nabla w_\xi) \cdot (\xi + \nabla w_\xi) dy = \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j A_{ij}^* = A^* \xi \cdot \xi.$$

Bornes arithmétique et harmonique

En prenant $w = 0$ dans le principe variationnel, on obtient la **borne arithmétique**

$$A^* \xi \cdot \xi \leq \left(\int_Y A(y) dy \right) \xi \cdot \xi$$

En élargissant l'espace de minimisation, on obtient la **borne harmonique**

$$\left(\int_Y A^{-1}(y) dy \right)^{-1} \xi \cdot \xi \leq A^* \xi \cdot \xi$$

On peut améliorer ces bornes dans le cas de composites à deux phases !

En effet, comme $\int_Y \nabla w \, dy = 0$, on **élargit l'espace de minimisation** en remplaçant ∇w par un champ de vecteur $\zeta(y)$ à moyenne nulle sur Y

$$A^* \xi \cdot \xi \geq \min_{\zeta \in L^2_{\#}(Y)^N, \int_Y \zeta \, dy = 0} \int_Y A(y) (\xi + \zeta(y)) \cdot (\xi + \zeta(y)) \, dy$$

L'équation d'Euler pour le minimiseur $\zeta_{\xi}(y)$ de ce problème convexe est

$$A(y) (\xi + \zeta_{\xi}(y)) = \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte $\int_Y \zeta \, dy = 0$.

On a

$$\xi = \left(\int_Y A(y)^{-1} \, dy \right) \lambda$$

et donc

$$\int_Y A(y) (\xi + \zeta_{\xi}(y)) \cdot (\xi + \zeta_{\xi}(y)) \, dy = \left(\int_Y A(y)^{-1} \, dy \right)^{-1} \xi \cdot \xi.$$

7.3.5 Caractérisation de G_θ

On considère deux phases isotropes $A = \alpha \text{Id}$ et $B = \beta \text{Id}$ avec $0 < \alpha < \beta$.

Théorème 7.17. L'ensemble G_θ de tous les tenseurs homogénéisés obtenus par mélange de α et β en proportions θ et $(1 - \theta)$ est l'ensemble de toutes les matrices symétriques A^* de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ qui vérifient

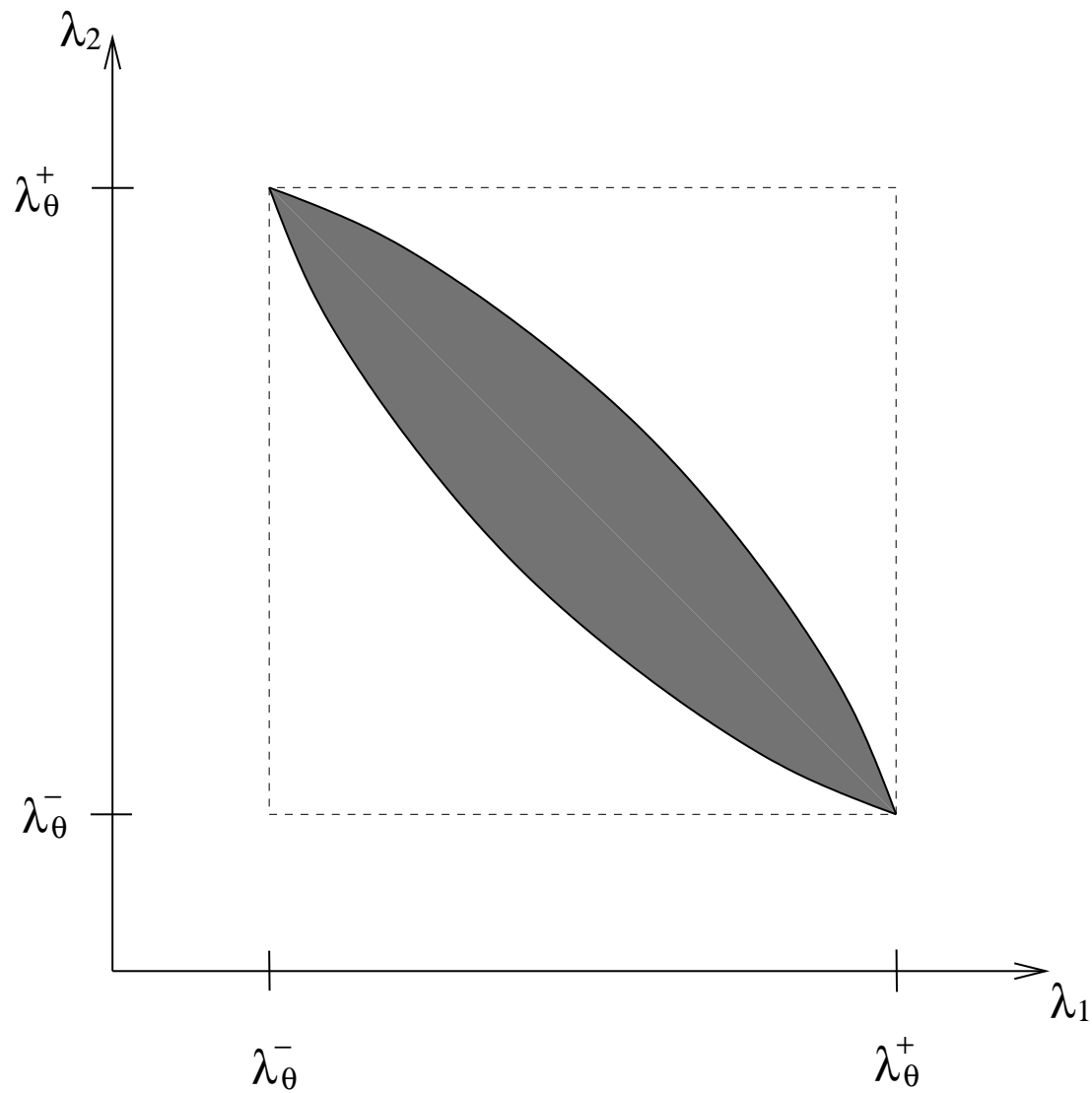
$$\left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1 - \theta}{\beta} \right)^{-1} = \lambda_\theta^- \leq \lambda_i \leq \lambda_\theta^+ = \theta\alpha + (1 - \theta)\beta \quad 1 \leq i \leq N$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i - \alpha} \leq \frac{1}{\lambda_\theta^- - \alpha} + \frac{N - 1}{\lambda_\theta^+ - \alpha}$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta - \lambda_i} \leq \frac{1}{\beta - \lambda_\theta^-} + \frac{N - 1}{\beta - \lambda_\theta^+},$$

De plus ces bornes, dites de [Hashin et Shtrikman](#), sont optimales et atteintes par des laminés séquentiels d'ordre N .

Ensemble G_θ en dimension $N = 2$



Démonstration. On commence par montrer que toutes les matrices vérifiant ces inégalités (bornes de Hashin-Shtrikman) appartiennent à G_θ .

Montrons d'abord que la borne supérieure est atteinte. Soit une matrice A^* telle que

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta - \lambda_i} = \frac{1}{\beta - \lambda_\theta^-} + \frac{N-1}{\beta - \lambda_\theta^+}.$$

Soit un laminé séquentiel A_L^* de matrice β et d'inclusion α , de rang N dans la base orthonormée des vecteurs propres de A^* . Il est défini par

$$\theta (A_L^* - \beta \text{Id})^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \text{Id} + (1 - \theta) \sum_{i=1}^N m_i \frac{e_i \otimes e_i}{\beta} \quad \text{avec} \quad m_i \geq 0, \sum_{i=1}^N m_i = 1.$$

On a $A^* = A_L^*$ si on peut choisir les m_i tels que

$$\frac{\theta}{\lambda_i - \beta} = \frac{1}{\alpha - \beta} + \frac{m_i(1 - \theta)}{\beta} \Leftrightarrow m_i = \frac{\beta(\lambda_\theta^+ - \lambda_i)}{(1 - \theta)(\beta - \alpha)(\beta - \lambda_i)}$$

On vérifie que $0 < m_i < 1$ est équivalent à $\lambda_\theta^- < \lambda_i < \lambda_\theta^+$ et que

$$\sum_{i=1}^N m_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta - \lambda_i} = \frac{1}{\beta - \lambda_\theta^-} + \frac{N-1}{\beta - \lambda_\theta^+},$$

donc toute matrice sur la borne supérieure est un laminé séquentiel de matrice β , d'inclusion α , et de rang N .

Même démonstration pour la borne inférieure atteinte par des laminés séquentiels de matrice α , d'inclusion β , et de rang N .

Ensuite, un calcul simple montre que les matrices “à l'intérieur” sont atteintes par une lamination simple de deux matrices, l'une sur la borne supérieure, l'autre sur la borne inférieure.

Calcul simple pour l'intérieur de G_θ

Rappel de la formule de lamination:

$$\tau (A^* - B)^{-1} = (A - B)^{-1} + \frac{(1 - \tau)}{B e_1 \cdot e_1} e_1 \otimes e_1$$

Cas particulier: $A, B \in G_\theta$ diagonales dans la base (e_1, \dots, e_N) .

$$A = \text{diag}(a_1, \dots, a_N) \quad B = \text{diag}(b_1, \dots, b_N)$$

Alors $A^* \in G_\theta$ et on a pour tout $\tau \in [0, 1]$

$$a_1^* = \left(\frac{\tau}{a_1} + \frac{1 - \tau}{b_1} \right)^{-1} \quad a_i^* = \tau a_i + (1 - \tau) b_i \quad 2 \leq i \leq N.$$

Arcs d'hyperboles qui relient les bords de G_θ .

Il reste à établir ces bornes inférieure et supérieure de Hashin-Shtrikman.

Pour établir la borne inférieure on utilise le **principe variationnel de Hashin et Shtrikman**.

Idée principale: utiliser l'analyse de Fourier et le théorème de Plancherel, mais il faut d'abord **éliminer les termes cubiques**.

Par définition de A^* , pour $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$A^* \xi \cdot \xi = \min_{w(y) \in H_{\#}^1(Y)} \int_Y \left(\chi(y)\alpha + (1 - \chi(y))\beta \right) (\xi + \nabla w) \cdot (\xi + \nabla w) dy$$

On soustrait un **matériau de référence** α

$$\begin{aligned} \int_Y (\chi\alpha + (1 - \chi)\beta) |\xi + \nabla w|^2 dy = \\ \int_Y (1 - \chi)(\beta - \alpha) |\xi + \nabla w|^2 dy + \int_Y \alpha |\xi + \nabla w|^2 dy. \end{aligned}$$

On utilise la **dualité convexe** (ou transformée de Legendre): pour une matrice M symétrique définie positive, on a

$$M\zeta \cdot \zeta = \max_{\eta \in \mathbb{R}^N} (2\zeta \cdot \eta - M^{-1}\eta \cdot \eta) \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^N.$$

Comme $\beta - \alpha > 0$, on applique cette formule en tout point de Y , et il vient

$$\int_Y (1 - \chi)(\beta - \alpha)|\xi + \nabla w|^2 dy =$$

$$\max_{\eta(y) \in L^2_{\#}(Y)^N} \int_Y (1 - \chi) \left(2(\xi + \nabla w) \cdot \eta - (\beta - \alpha)^{-1} |\eta|^2 \right) dy,$$

qui devient une **inégalité** si on se restreint à des vecteurs η **constants** dans Y

$$\int_Y (1 - \chi)(\beta - \alpha)|\xi + \nabla w|^2 dy \geq$$

$$\geq \max_{\eta} \int_Y (1 - \chi) \left(2(\xi + \nabla w) \cdot \eta - (\beta - \alpha)^{-1} |\eta|^2 \right) dy$$

$$\geq (1 - \theta) \left(2\xi \cdot \eta - (\beta - \alpha)^{-1} |\eta|^2 \right) - 2 \int_Y \chi \nabla w \cdot \eta dy.$$

D'autre part, à cause de la périodicité, $\int_Y \nabla w dy = 0$ et on a

$$\int_Y \alpha |\xi + \nabla w|^2 dy = \alpha |\xi|^2 + \int_Y \alpha |\nabla w|^2 dy.$$

Au total, on a obtenu, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^N$,

$$A^* \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2 + (1 - \theta) \left(2\xi \cdot \eta - (\beta - \alpha)^{-1} |\eta|^2 \right) - g(\chi, \eta),$$

où $g(\chi, \eta)$ est un terme, dit **non-local**, défini par

$$g(\chi, \eta) = - \min_{w(y) \in H_{\#}^1(Y)} \int_Y (\alpha |\nabla w|^2 - 2\chi \nabla w \cdot \eta) dy.$$

On peut utiliser l'analyse de Fourier pour calculer $g(\chi, \eta)$.

Par périodicité, χ et la fonction test w s'écrivent comme des séries de Fourier

$$\chi(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \hat{\chi}(k) e^{2i\pi k \cdot y}, \quad w(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \hat{w}(k) e^{2i\pi k \cdot y}.$$

Comme χ et w sont à valeurs réelles, leurs coefficients de Fourier satisfont

$$\overline{\hat{\chi}(k)} = \hat{\chi}(-k) \quad \text{et} \quad \overline{\hat{w}(k)} = \hat{w}(-k).$$

Le gradient de w est

$$\nabla w(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} 2i\pi e^{2i\pi k \cdot y} \hat{w}(k) k.$$

La formule de Plancherel donne

$$\begin{aligned} & \int_Y (\alpha |\nabla w|^2 - 2\chi \nabla w \cdot \eta) dy \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \left(4\pi^2 \alpha |\hat{w}(k) k|^2 - 4i\pi \overline{\hat{\chi}(k)} \hat{w}(k) k \cdot \eta \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \left(4\pi^2 \alpha |k|^2 |\hat{w}(k)|^2 + 4\pi \operatorname{Im} \left(\overline{\hat{\chi}(k)} \hat{w}(k) \right) \eta \cdot k \right). \end{aligned}$$

Minimiser en $w(y) \in H_{\#}^1(Y) \Leftrightarrow$ minimiser en $\hat{w}(k) \in \mathbb{C}$.

Pour $k \neq 0$ le minimum est atteint par

$$\hat{w}(k) = -\frac{i\hat{\chi}(k)}{2\pi\alpha|k|^2}\eta \cdot k,$$

et on trouve

$$g(\chi, \eta) = \left(\alpha^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N, k \neq 0} |\hat{\chi}(k)|^2 \frac{k}{|k|} \otimes \frac{k}{|k|} \right) \eta \cdot \eta = \alpha^{-1} \theta(1 - \theta) M \eta \cdot \eta,$$

où M est une matrice symétrique positive. Comme, par Plancherel, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N, k \neq 0} |\hat{\chi}(k)|^2 = \int_Y |\chi(y) - \theta|^2 dy = \theta(1 - \theta),$$

on en déduit que la trace de M est égale à 1.

En regroupant on obtient, pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$,

$$A^* \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2 + (1 - \theta) \left(2\xi \cdot \eta - (\beta - \alpha)^{-1} |\eta|^2 \right) - \alpha^{-1} \theta (1 - \theta) M \eta \cdot \eta.$$

Le minimum (en ξ) de cette inégalité s'obtient en prenant

$$\xi = (1 - \theta)(A^* - \alpha)^{-1} \eta$$

On en déduit

$$(1 - \theta)(A^* - \alpha)^{-1} \eta \cdot \eta \leq (\beta - \alpha)^{-1} |\eta|^2 + \alpha^{-1} \theta M \eta \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N.$$

$$\Leftrightarrow (1 - \theta)(A^* - \alpha)^{-1} \leq (\beta - \alpha)^{-1} \text{Id} + \alpha^{-1} \theta M$$

En prenant la trace de cette inégalité matricielle, et comme $\text{Tr} M = 1$, on obtient bien la [borne inférieure de Hashin et Shtrikman](#).

La preuve de la borne supérieure est similaire.

7.4 Formulation homogénéisée de l'optimisation

Le problème d'optimisation **relaxé ou homogénéisé** est

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}^*} J(\theta, A^*),$$

avec un critère

$$J(\theta, A^*) = \int_{\Omega} f u \, dx, \quad \text{ou} \quad J(\theta, A^*) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 \, dx,$$

un ensemble admissible homogénéisé donné par

$$\mathcal{U}_{ad}^* = \left\{ (\theta, A^*) \in L^\infty \left(\Omega; [0, 1] \times \mathbb{R}^{N^2} \right), A^*(x) \in G_{\theta(x)} \text{ dans } \Omega, \int_{\Omega} \theta(x) \, dx = V_\alpha \right\},$$

où G_θ est **explicitement caractérisé**.

L'équation d'état homogénéisée est

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Théorème 7.19 (admis). La formulation homogénéisée est la **relaxation** du problème original d'optimisation de formes au sens où:

- ☞ il existe, au moins, une forme optimale composite (θ, A^*) ,
- ☞ toute suite minimisante de formes classiques χ converge, au sens de l'homogénéisation, vers une solution optimale (θ, A^*) ,
- ☞ toute solution optimale composite (θ, A^*) est la limite d'une suite minimisante de formes classiques.

En particulier, les minima des énergie originale et homogénéisée coïncident

$$\inf_{\chi \in \mathcal{U}_{ad}} J(\chi) = \min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}^*} J(\theta, A^*).$$

Remarque.

- ☞ Le problème d'optimisation de formes **n'est pas changé par la relaxation.**
- ☞ Près d'une forme composite optimale, on est sûr de trouver une **forme classique quasi-optimale.**
- ☞ Ce théorème conduit à de **nouveaux algorithmes numériques.**

7.4.2 Conditions d'optimalité

Calculons le gradient de l'exemple suivant de fonction objectif

$$J(\theta, A^*) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 dx,$$

où $u_0 \in L^2(\Omega)$. On introduit un **état adjoint** p , solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla p) = -2(u - u_0) & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Proposition 7.20. Soit $\alpha > 0$ et \mathcal{M}_α l'ensemble des matrices symétriques définies positives M telles que $M \geq \alpha \operatorname{Id}$. Le critère J est différentiable par rapport à A^* dans $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_\alpha)$, et sa dérivée est

$$\nabla_{A^*} J(\theta, A^*) = \nabla u \otimes \nabla p.$$

Remarque. Dérivée nulle par rapport à θ (qui n'apparaît que dans la contrainte $A^* \in G_\theta$).

Démonstration de la Proposition 7.20

C'est standard ! C'est devenu un problème d'optimisation paramétrique (A^* joue le rôle d'une épaisseur).

On définit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(A^*, v, q) = \int_{\Omega} |v - u_0|^2 dx + \int_{\Omega} A^* \nabla v \cdot \nabla q dx - \int_{\Omega} f q dx$$

La dérivée par rapport à q donne l'état.

La dérivée par rapport à v donne l'état adjoint.

La dérivée par rapport à A^* donne le gradient

$$\nabla_{A^*} J(\theta, A^*) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^*}(A^*, u, p) = \nabla u \otimes \nabla p.$$

Conséquence essentielle

Théorème 7.21. Soit (θ, A^*) un point de minimum global de J dans \mathcal{U}_{ad}^* qui admet u et p comme état et état adjoint. Il existe $(\tilde{\theta}, \tilde{A}^*)$, autre point de minimum global de J dans \mathcal{U}_{ad}^* , qui admet les mêmes état et état adjoint u et p , et tel que \tilde{A}^* est un laminé simple de rang 1.

Simplification: on peut remplacer dans la définition de \mathcal{U}_{ad}^* l'ensemble G_θ par son sous-ensemble des laminés simples de rang 1.

Remarque.

- ☞ Condition d'optimalité \Rightarrow simplification du problème.
- ☞ On utilise cette simplification dans les algorithmes numériques.
- ☞ Simplification valable pour d'autres fonctions objectifs, **mais pas pour une optimisation multi-chargements.**

Démonstration. On fixe θ et on fait des variations uniquement par rapport à A^* . On remarque que G_θ est convexe (pas évident). La condition d'optimalité ou inéquation d'Euler est donc

$$\int_{\Omega} (A^0 - A^*) \nabla u \cdot \nabla p \, dx \geq 0.$$

pour tout $A^0 \in G_\theta$, qui est équivalente à

$$A^* \nabla u \cdot \nabla p = \min_{A^0 \in G_\theta} (A^0 \nabla u \cdot \nabla p) \quad \forall x \in \Omega.$$

Si ∇u ou ∇p est nul, alors n'importe quel A^* est optimal. Sinon, on définit

$$e = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad \text{et} \quad e' = \frac{\nabla p}{|\nabla p|},$$

et on cherche les points de minimum A^* de

$$\min_{A^0 \in G_\theta} 4A^0 e \cdot e' = A^0 (e + e') \cdot (e + e') - A^0 (e - e') \cdot (e - e').$$

Une borne inférieure est facilement obtenue

$$\begin{aligned} \min_{A^0 \in G_\theta} 4A^0 e \cdot e' &\geq \min_{A^0 \in G_\theta} A^0(e + e') \cdot (e + e') - \max_{A^0 \in G_\theta} A^0(e - e') \cdot (e - e') \\ &= \lambda_\theta^- |e + e'|^2 - \lambda_\theta^+ |e - e'|^2. \end{aligned}$$

Cette borne inférieure est en fait la **valeur exacte du minimum**.

En effet, si on choisit $A^0 = A^1$ qui est un laminé simple de rang 1 dans la direction $e + e'$, orthogonale à $e - e'$, on a

$$A^1(e + e') = \lambda_\theta^- (e + e') \quad \text{et} \quad A^1(e - e') = \lambda_\theta^+ (e - e')$$

et un calcul facile montre que

$$4A^1 e \cdot e' = \lambda_\theta^- |e + e'|^2 - \lambda_\theta^+ |e - e'|^2$$

Donc

$$\min_{A^0 \in G_\theta} 4A^0 e \cdot e' = \lambda_\theta^- |e + e'|^2 - \lambda_\theta^+ |e - e'|^2$$

Si maintenant A^* est n'importe quel tenseur optimal, alors il vérifie comme le laminé de rang 1

$$A^*(e + e') = \lambda_{\theta}^{-}(e + e') \quad \text{et} \quad A^*(e - e') = \lambda_{\theta}^{+}(e - e') \quad (1)$$

En effet, si (1) n'était pas vrai, une des bornes arithmétique et harmonique donnerait une inégalité stricte

$$4A^*e \cdot e' = A^*(e + e') \cdot (e + e') - A^*(e - e') \cdot (e - e') > \lambda_{\theta}^{-}|e + e'|^2 - \lambda_{\theta}^{+}|e - e'|^2$$

ce qui est une contradiction avec le caractère optimal de A^* .

On en déduit que tout A^* optimal vérifie comme ce laminé simple A^1

$$2A^* \nabla u = 2A^1 \nabla u = (\lambda_\theta^+ + \lambda_\theta^-) \nabla u + (\lambda_\theta^+ - \lambda_\theta^-) \frac{|\nabla u|}{|\nabla p|} \nabla p$$

$$2A^* \nabla p = 2A^1 \nabla p = (\lambda_\theta^+ + \lambda_\theta^-) \nabla p + (\lambda_\theta^+ - \lambda_\theta^-) \frac{|\nabla p|}{|\nabla u|} \nabla u,$$

On peut donc remplacer n'importe quel A^* optimal par ce laminé simple A^1 (de rang 1) **sans changer** u et p .

$$-\operatorname{div}(A^* \nabla u) = -\operatorname{div}(A^1 \nabla u) = f$$

$$-\operatorname{div}(A^* \nabla p) = -\operatorname{div}(A^1 \nabla p) = -2(u - u_0)$$

Paramétrisation des laminés simples

On se limite aux laminés simples (en dimension $N = 2$ pour simplifier)

$$A^*(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\theta^+ & 0 \\ 0 & \lambda_\theta^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \phi \in [0, \pi].$$

L'ensemble admissible est donc simplifié en

$$\mathcal{U}_{ad}^L = \left\{ (\theta, \phi) \in L^\infty(\Omega; [0, 1] \times [0, \pi]), \int_\Omega \theta(x) dx = V_\alpha \right\}.$$

Proposition 7.23. Le critère $J(\theta, \phi)$ est différentiable par rapport à (θ, ϕ) dans \mathcal{U}_{ad}^L , et sa dérivée est

$$\nabla_\phi J(\theta, \phi) = \frac{\partial A^*}{\partial \phi} \nabla u \cdot \nabla p \quad \text{et} \quad \nabla_\theta J(\theta, \phi) = \frac{\partial A^*}{\partial \theta} \nabla u \cdot \nabla p$$

7.4.3 Algorithme numérique

Algorithme de gradient projeté pour la minimisation de $J(\theta, \phi)$.

1. On **initialise** les paramètres de forme θ_0 et ϕ_0 (par exemple, égaux à des constantes).
2. Jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$ on **itère** en calculant l'état u_k et l'état adjoint p_k , solutions avec les précédents paramètres de forme (θ_k, ϕ_k) , puis on **met à jour** ces paramètres par

$$\theta_{k+1} = \max \left(0, \min \left(1, \theta_k - t_k \left(\ell_k + \frac{\partial A^*}{\partial \theta}(\theta_k, \phi_k) \nabla u_k \cdot \nabla p_k \right) \right) \right)$$

$$\phi_{k+1} = \phi_k - t_k \frac{\partial A^*}{\partial \phi}(\theta_k, \phi_k) \nabla u_k \cdot \nabla p_k$$

avec ℓ_k un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte de volume (déterminée itérativement), et $t_k > 0$ un pas de descente tel que $J(\theta_{k+1}, \phi_{k+1}) < J(\theta_k, \phi_k)$.

Exemple

Maximisation de la rigidité à la torsion (maximisation de la compliance).

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}^L} \left\{ J(\theta, A^*) = - \int_{\Omega} u(x) dx \right\},$$

où u est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla u) = 1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et l'état adjoint est simplement $p = u$.

On résout dans le domaine $\Omega = (0, 1)^2$ avec les phases $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. On fixe une contrainte de volume de 50% de α . On initialise avec une valeur constante de $\theta = 0.5$ et un angle constant nul de lamination. On fait 30 itérations.

Cas auto-adjoint $p = u$.

$$\nabla_{A^*} J(\theta, A^*) = \nabla u \otimes \nabla u \geq 0.$$

Pour minimiser J il faut donc diminuer A^* .

Tout A^* optimal vérifie

$$A^* \nabla u = \lambda_{\theta}^- \nabla u$$

donc le composite optimal est le **plus mauvais conducteur** possible.

Conséquence. On élimine l'angle ϕ et il ne reste plus qu'à optimiser en θ !

Convexité

On réécrit le problème d'optimisation grâce à l'énergie primale

$$-\int_{\Omega} u \, dx = -\int_{\Omega} \lambda_{\theta}^{-} |\nabla u|^2 \, dx = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \int_{\Omega} \lambda_{\theta}^{-} |\nabla v|^2 \, dx - 2 \int_{\Omega} v \, dx$$

Donc, on obtient une double minimisation

$$\min_{\theta, A^* = \lambda_{\theta}^{-}} J(\theta, A^*) = \min_{\theta, v} \int_{\Omega} \lambda_{\theta}^{-} |\nabla v|^2 \, dx - 2 \int_{\Omega} v \, dx$$

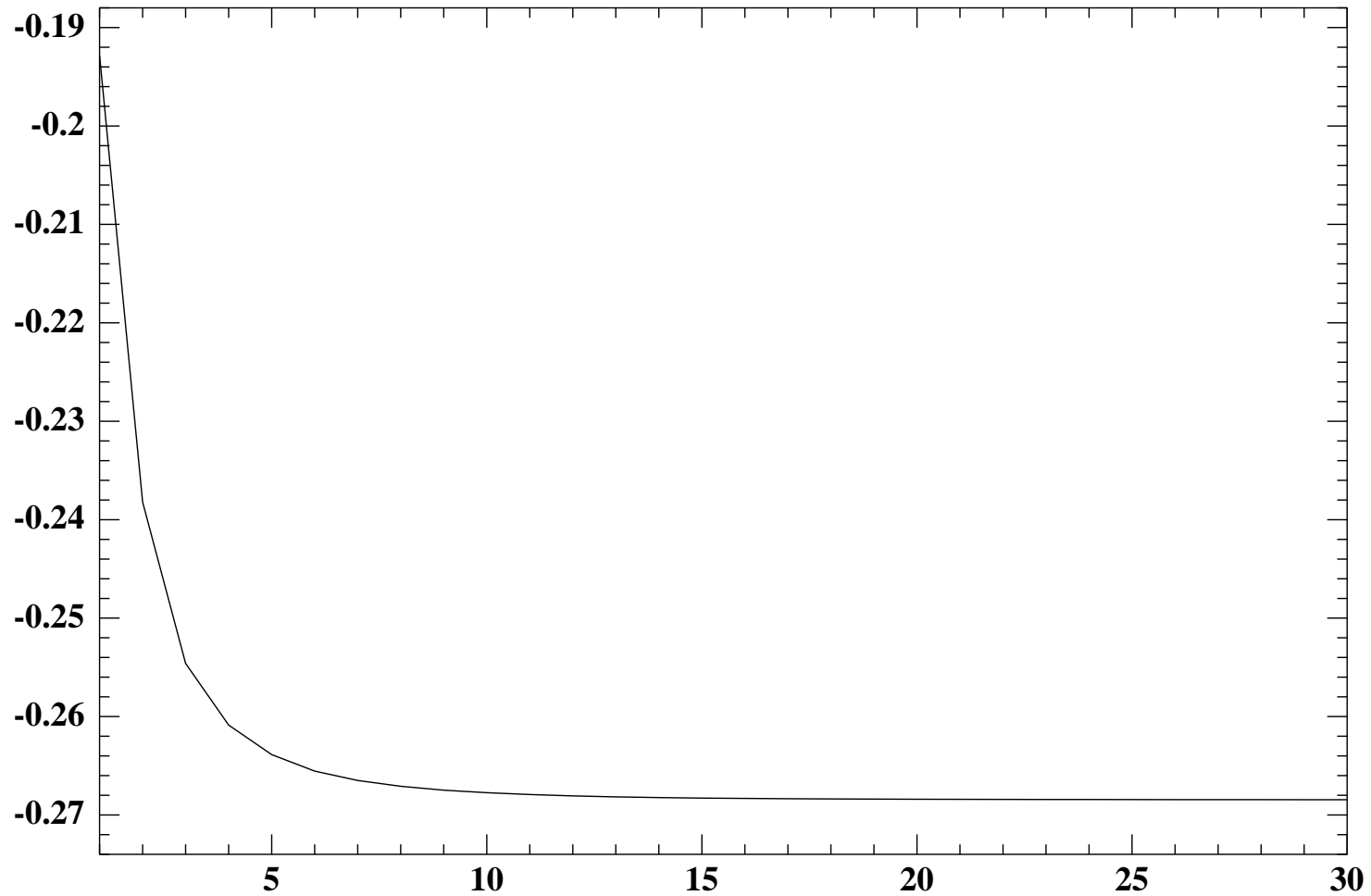
Rappel: la fonction $(\theta, v) \rightarrow \lambda_{\theta}^{-} |\nabla v|^2$ est convexe.

Conséquence. Il n'y a que des minima globaux !

Numériquement, on utilise un algorithme de minimisation en direction alternées (voir le chapitre 5).

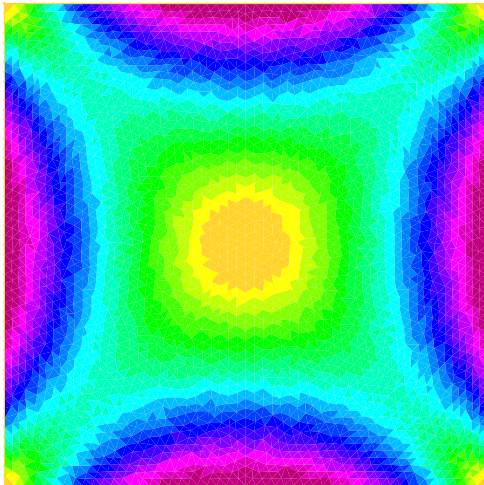
Historique de convergence:

fonction objectif en fonction du nombre d'itérations.

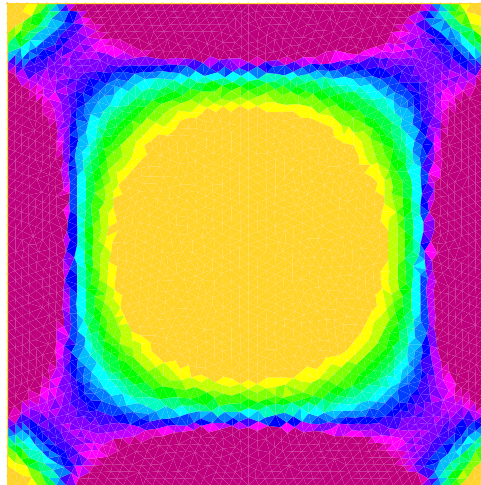


Fraction volumique θ (itérations 1, 5, et 30)

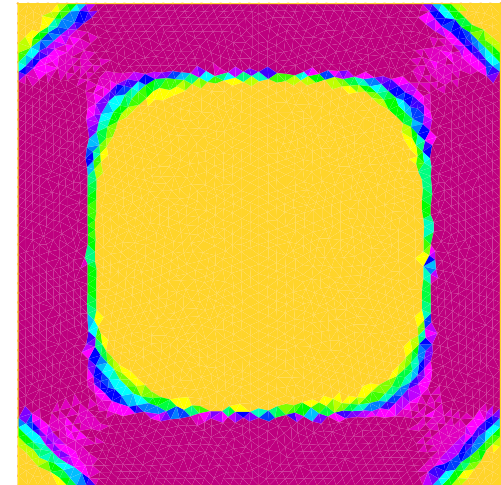
Iteration 1, Compliance 0.238663, Volume=0.5



Iteration 5, Compliance 0.206103, Volume=0.5



Forme finale, Iteration 30, Compliance -0.269235, Volume=0.5



Exemple

Minimisation de la compliance.

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}^L} \left\{ J(\theta, A^*) = \int_{\Omega} u(x) dx \right\},$$

où u est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla u) = 1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et l'état adjoint est simplement $p = -u$.

On résout dans le domaine $\Omega = (0, 1)^2$ avec les phases $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. On fixe une contrainte de volume de 50% de α . On initialise avec une valeur constante de $\theta = 0.5$ et un angle constant nul de lamination. On fait 50 itérations.

Cas auto-adjoint $p = -u$.

$$\nabla_{A^*} J(\theta, A^*) = -\nabla u \otimes \nabla u \leq 0.$$

Pour minimiser J il faut donc augmenter A^* .

Tout A^* optimal vérifie

$$A^* \nabla u = \lambda_{\theta}^+ \nabla u$$

donc le composite optimal est le **meilleur conducteur** possible.

Conséquence. On élimine l'angle ϕ et il ne reste plus qu'à optimiser en θ !

Convexité

On réécrit le problème d'optimisation grâce à l'énergie duale

$$\int_{\Omega} u \, dx = \min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega)^N \\ -\operatorname{div} \tau = 1 \text{ dans } \Omega}} \int_{\Omega} (\lambda_{\theta}^+)^{-1} |\tau|^2 \, dx .$$

Donc, on obtient une double minimisation

$$\min_{\theta, A^* = \lambda_{\theta}^+} J(\theta, A^*) = \min_{\theta, \tau} \int_{\Omega} (\lambda_{\theta}^+)^{-1} |\tau|^2 \, dx$$

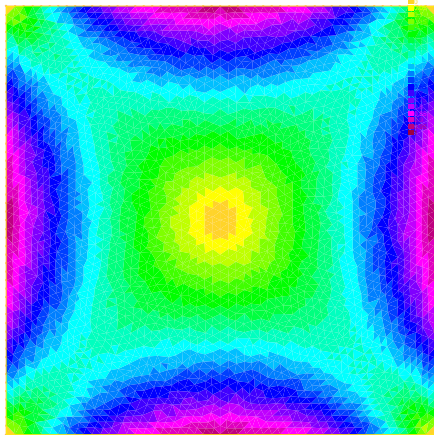
Rappel: la fonction $(\theta, \tau) \rightarrow \frac{|\tau|^2}{\lambda_{\theta}^+}$ est convexe.

Conséquence. Il n'y a que des minima globaux !

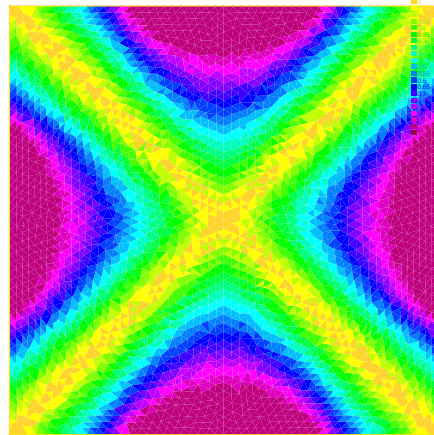
Numériquement, on utilise un algorithme de minimisation en direction alternées (voir le chapitre 5).

Membrane de compliance minimale (itérations 1, 10, et 30)

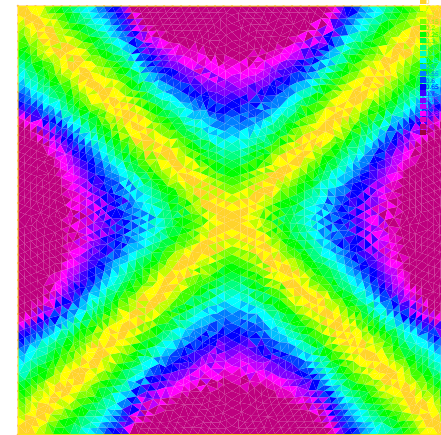
Iteration 1, Compliance 0.0569295, Volume=0.5



Iteration 10, Compliance 0.0552414, Volume=0.5



Forme finale, Iteration 30, Compliance 0.0552046, Volume=0.5



Remarques

Convergence vers un minimum global.

1. Expériences numériques avec diverses initialisations.
2. Propriété de convexité.

Optimisation de formes plutôt que d'un mélange.

1. Numériquement on représente des trous par une phase α très faible ou molle ($\approx 10^{-3}\beta$).
2. Mathématiquement, si $\alpha \rightarrow 0$ on obtient des conditions aux limites de Neumann sur le bord des trous.

Pénalisation

L'algorithme précédent calcule des formes **composites** alors qu'on veut plutôt des formes **classiques**.

On utilise une technique de **pénalisation** pour forcer la densité à ne prendre que les valeurs 0 ou 1.

Algorithmes possibles: après convergence vers une forme composite,

1. soit on ajoute un terme de pénalisation à la fonction objectif

$$J(\theta, A^*) + c_{pen} \int_{\Omega} \theta(1 - \theta) dx,$$

2. soit on continue l'algorithme précédent en utilisant une densité pénalisée

$$\theta_{pen} = \frac{1 - \cos(\pi\theta_{opt})}{2}.$$

Si $0 < \theta_{opt} < 1/2$, alors $\theta_{pen} < \theta_{opt}$, tandis que, si $1/2 < \theta_{opt} < 1$, alors $\theta_{pen} > \theta_{opt}$.

Exemple

Radiateur optimal.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(A^* \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ A^* \nabla u \cdot n = 1 & \text{sur } \Gamma_N \\ A^* \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{array} \right.$$

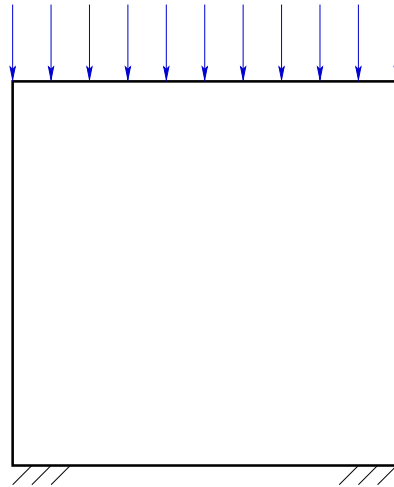
On minimise la température là où on chauffe

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{U}_{ad}^L} \left\{ J(\theta, A^*) = \int_{\Gamma_N} u \, ds \right\}.$$

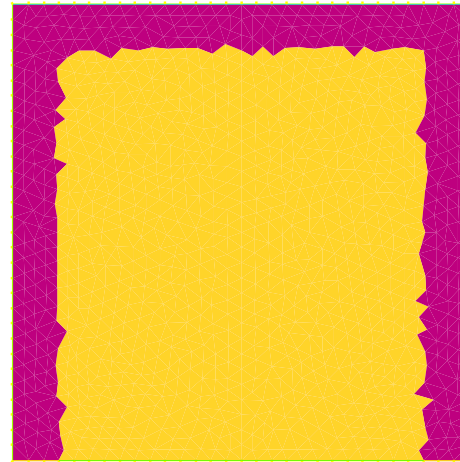
C'est justement la compliance ! Donc le problème est auto-adjoint avec $p = -u$.

Matériaux isotropes de conductivité $\alpha = 0.01$ et $\beta = 1$, en proportions 50, 50%, dans un domaine $\Omega = (0, 1)^2$.

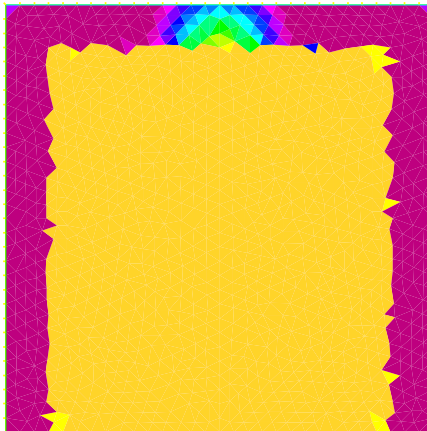
Radiateur optimal



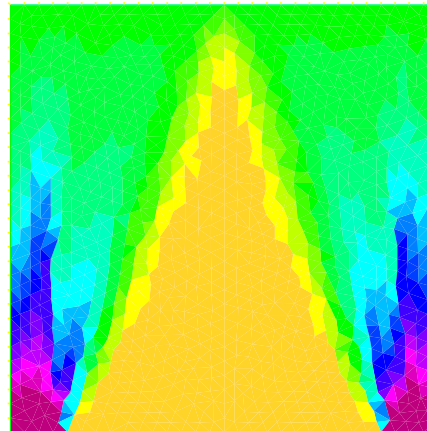
Iteration 0, Compliance 5.11857, Volume=0.277627



Iteration 1, Compliance 4.68326, Volume=0.285548



Iteration 50, Compliance 3.67461, Volume=0.285548



Forme finale, Iteration 70, Compliance 3.60791, Volume=0.285548

