ECOLE POLYTECHNIQUE
Programme d'Approfondissement MAP
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Corrigé (par O. Pantz) de l'examen écrit du 17 Mars 2010

1 Optimisation paramétrique : 7 points

1. Le Lagrangien est l'application de $L^\infty(\Omega;[h_{min},h_{max}]) \times H^1_0(\Omega)^4$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{L}(h,u_1,u_2,p_1,p_2) = j(u_1,u_2) - \int_\Omega h(\nabla u_1\cdot\nabla p_1 + \nabla u_2\cdot\nabla p_2)\,dx + \int_\Omega f_1p_1 + f_2p_2\,dx,$$

où

$$j(u_1,u_2) = \int_\Omega |u_1-\alpha u_2|^2\,dx.$$

Les états adjoints sont les éléments $p_1(h)$ et $p_2(h)$ de $H^1_0(\Omega)$ définis par

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_1}(h,u_1(h),u_2(h),p_1(h),p_2(h)) = 0$$

et

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_2}(h,u_1(h),u_2(h),p_1(h),p_2(h)) = 0.$$

Or,

$$\left\langle \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_1}(h,u_1,u_2,p_1,p_2),q\right\rangle = 2\int_\Omega (u_1-\alpha u_2)q\,dx - \int_\Omega h\nabla q\cdot\nabla p_1\,dx$$

et

$$\left\langle \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_1}(h,u_1,u_2,p_1,p_2),q\right\rangle = -2\alpha\int_\Omega (u_1-\alpha u_2)q\,dx - \int_\Omega h\nabla q\cdot\nabla p_2\,dx.$$

Les états adjoints sont donc solutions des EDP

$$\begin{cases} -\Delta p_1 = 2(u_1-\alpha u_2) & \text{dans } \Omega \\ p_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta p_2 = 2\alpha(\alpha u_2-u_1) & \text{dans } \Omega \\ p_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2. En dérivant la relation

$$J(h) = \mathcal{L}(h, u_1(h), u_2(h), p_1, p_2)$$

par rapport à h est en évaluant cette dernière en $p_1 = p_1(h), p_2 = p_2(h)$, il vient

$$\langle J'(h), k\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u_1(h), u_2(h), p_1(h), p_2(h)), k \right\rangle.$$

Or

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}, k \right\rangle = -\int_\Omega (\nabla u_1(h) \cdot \nabla p_1(h) + \nabla u_2(h) \cdot \nabla p_2(h)) k \, dx.$$

Ainsi

$$J'(h) = -(\nabla u_1(h) \cdot \nabla p_1(h) + \nabla u_2(h) \cdot \nabla p_2(h)),$$

où $u_1(h), u_2(h)$ sont les solutions du problème direct et $p_1(h)$ et $p_2(h)$ sont les solutions du problème adjoint.

3. Si α est une constante, on a $p_2 = -\alpha p_2$. On peut donc déduire p_2 de p_1. Si α est une fonction de x, on ne peut plus déduire p_2 de p_1. La seule simplification possible porte sur l'assemblage de la matrice de rigidité et sa factorisation éventuelle qui est identique pour tous les problèmes.

2 Optimisation géométrique : 6 points

On introduit le Lagrangien associé au problème d'optimisation

$$\mathcal{L}(\omega, u, p) = \int_\Omega |u - u_0|^2 \, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla p \, dx + \int_\omega f p \, dx.$$

On constate que, pour tout élément $p \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$J(\omega) = \mathcal{L}(\omega, u(\omega), p), \tag{1}$$

où $u(\omega)$ est la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} -\Delta u = \chi_\omega f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit θ un champ de vecteur sur Ω tel que $\theta \cdot n = 0$ sur le bord de Ω. En dérivant l'expression (1), il vient

$$\langle J'(\omega), \theta\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}, \theta \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}, \langle u'(\omega), \theta\rangle \right\rangle.$$

Or
$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}, q \right\rangle = 2\int_\Omega (u-u_0) q\,dx - \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q.$$
Si $p(\omega)$ désigne la solution du problème aux limites
$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta p = 2(u(\omega)-u_0) & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2}$$
on a
$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\omega, u(\omega), p(\omega)), q \right\rangle = 0$$
pour tout $q \in H_0^1(\Omega)$. On en déduit que
$$\langle J'(\omega), \theta\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(\omega, u(\omega), p(\omega)), \theta \right\rangle.$$
Enfin,
$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}, \theta \right\rangle = \int_{\partial\omega} f p\, \theta \cdot n\, ds.$$
Ainsi,
$$\langle J'(\omega), \theta\rangle = \int_{\partial\omega} f p(\omega)\, \theta \cdot n\, ds.$$
où $p(\omega)$ est solution du problème adjoint (2).

3 Homogénéisation : 7 points

1. Le tenseur $A^*(\theta)$ est diagonal. La composante associée à la direction e_1 est la moyenne harmonique des conductivités tandis que la composante associée à la direction e_2 est la moyenne arithmétique de ces dernières. On a donc
$$A^*(\theta) = \begin{pmatrix} (\theta\alpha^{-1} + (1-\theta)\beta^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & \theta\beta + (1-\theta)\alpha \end{pmatrix}.$$
Le composite ainsi obtenu est isotrope si et seulement si
$$(\theta\alpha^{-1} + (1-\theta)\beta^{-1})^{-1} = \theta\beta + (1-\theta)\alpha,$$
ou encore
$$(\theta\beta + (1-\theta)\alpha)^2 = \alpha\beta$$
ce qui donne l'unique valeur possible
$$\theta = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}.$$

2. On introduit le Lagrangien défini sur $L^\infty(\Omega;[0,1]) \times H^1_0(\Omega)^2$ par

$$\mathcal{L}(\theta,u,p) = \int_\Omega |u-u_0|^2\,dx + \int_\Omega A^*(\theta)\nabla u\cdot\nabla p\,dx - \int_\Omega fp\,dx.$$

L'état adjoint est obtenu est dérivant le Lagrangien par rapport à u. Il vient

$$\left\langle \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}(\theta,u,p),q\right\rangle = 2\int_\Omega (u-u_0)q\,dx + \int_\Omega A^*(\theta)\nabla q\cdot\nabla p\,dx.$$

Cette dérivée partielle s'annule pour tout $q \in H^1_0(\Omega)$ si et seulement si l'adjoint $p \in H^1_0(\Omega)$ est la solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A^*(\theta)\nabla p) = -2(u-u_0) & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

La dérivée de la fonction coût est obtenue en dérivant le Lagrangien par rapport à θ, puis en évaluant cette dérivée en $(\theta,u(\theta),p(\theta))$. Notons que

$$\frac{dA^*}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha\beta(\beta-\alpha)}{(\theta\beta+(1-\theta)\alpha)^2} & 0 \\ 0 & \beta-\alpha \end{pmatrix}.$$

Par dérivation du Lagrangien, il vient

$$\langle J'(\theta),k\rangle = \int_\Omega \frac{dA^*}{d\theta}\nabla u\cdot\nabla p\,k\,dx.$$

donc

$$J'(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha\beta(\beta-\alpha)}{(\theta\beta+(1-\theta)\alpha)^2} & 0 \\ 0 & \beta-\alpha \end{pmatrix}\nabla u\cdot\nabla p\,.$$