ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures
Cours de G. Allaire
Corrigé de l'examen écrit du 20 Mars 2002

(I) Minimisation de la compliance

1. Il s'agit de minimiser la fonction

$$\theta \;\to\; R^* K_0^{-1} R\tau \cdot \tau = K_0(R\tau)\cdot(R\tau) \text{ avec } R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si $\tau = 0$, alors n'importe quel angle θ réalise le minimum. Si $\tau \neq 0$, alors, en notant $e_2 = (0,1)^*$ le vecteur propre correspondant à la valeur propre β^{-1} de K_0^{-1}, le minimum est atteint pour un angle θ tel que $R\tau$ soit parallèle à e_2. Dans ce cas il existe un unique minimum $\theta \in [0,\pi[$ caractérisé par $\tan\theta = \tau_1/\tau_2$.

2. On réécrit la compliance comme le minimum de l'énergie complémentaire

$$\int_\Omega f(x)u(x)\,dx = \min_{\substack{\tau\in L^2(\Omega)^2 \\ -\mathrm{div}\,\tau = f \text{dans } \Omega}} \int_\Omega K^{-1(x)}\tau(x)\cdot\tau(x)\,dx.$$

Par conséquent le problème d'optimisation devient une double minimisation

$$\min_{\theta\in\mathcal{U}_{ad}} \min_{\substack{\tau\in L^2(\Omega)^2 \\ -\mathrm{div}\,\tau = f \text{dans } \Omega}} \int_\Omega K^{-1}\tau\cdot\tau\,dx,$$

dont on trouve facilement une condition d'optimalité. Si $(\theta,\tau) \in \mathcal{U}_{ad} \times L^2(\Omega)^2$ est un minimum, alors, d'après le cours, on retrouve que $\tau = K\nabla u$ où u est le déplacement solution de l'équation, et en tout point x l'angle $\theta(x)$ minimise $K^{-1}\tau\cdot\tau$. D'après la question précédente, $\tan\theta = \tau_1/\tau_2$ si $\tau \neq 0$, tandis que θ est quelconque si $\tau = 0$.

3. D'après la condition d'optimalité, on a $R\tau = \pm|\tau|e_2$ si (θ,τ) est optimal. Par conséquent,

$$K^{-1}\tau\cdot\tau = |\tau|^2 K_0^{-1} e_2\cdot e_2 = \beta^{-1}|\tau|^2.$$

Autrement dit, le matériau anisotrope optimal s'aligne en permanence avec le vecteur des constraintes τ qui ne "voit" que la rigidité β. On vérifie de même que $R\nabla u$ est toujours parallèle à e_2, ce qui implique que

$$K\nabla u = \beta\nabla u \text{ dans } \Omega.$$

Par conséquent, une solution du problème de minimisation de la compliance s'obtient en résolvant le problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\beta\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

puis en calculant, pour tout point x, l'angle $\theta(x)$ comme racine unique dans $[0,\pi[$ de $\tan\theta = \tau_1/\tau_2$ si $\tau \neq 0$ (si $\tau = 0$ on a aussi $\nabla u = 0$ et n'importe quel angle convient). On peut interpréter ce résultat en disant que l'optimisation du matériau anisotrope revient à obtenir le comportement du matériau isotrope homogène β (le plus rigide).

4. Si l'on considère plusieurs chargements $(f_i)_{1\le i\le n}$, en utilisant le principe de minimisation de l'énergie complémentaire la condition d'optimalité devient en chaque point x : l'angle θ minimise la fonction

$$\sum_{i=1}^{n} K^{-1}\tau_i\cdot\tau_i = K^{-1}\cdot T \text{ avec la matrice } T = \sum_{i=1}^{n}\tau_i\otimes\tau_i.$$

En se plaçant dans une base orthonormée de vecteurs propres de T, on vérifie facilement que le minimum est atteint pour l'angle (unique si T n'est pas proportionnelle à l'identité) qui aligne K_0^{-1} avec T, c'est-à-dire qui donne à K^{-1} les mêmes vecteurs propres que T et qui fasse correspondre à la plus grande valeur propre de T la plus petite de K_0^{-1} et réciproquement :

$$\min_{\theta} K^{-1}\cdot T = \alpha^{-1}T_1 + \beta^{-1}T_2$$

avec $0 \le T_1 \le T_2$ les valeurs propres de la matrice T (symétrique et positive). En général, dans le cas multi-chargements, utiliser le matériau anisotrope optimal ne revient pas à utiliser le matériau isotrope homogène β.

(II) Minimisation du critère de moindres carrés

1. On calculer le gradient de la fonction objectif dans la direction $\eta\in L^\infty(\Omega)$ donné par

$$\langle J'(\theta),\eta\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{J(\theta+t\eta)-J(\theta)}{t}.$$

Soit $u(\theta+t\eta)$ la solution de l'équation d'état pour l'angle $(\theta+t\eta)$. On note $v = \langle u'(\theta),\eta\rangle$ la dérivée de $t\to u(\theta+t\eta)$ en $t=0$. Un calcul simple montre que

$$\langle J'(\theta),\eta\rangle = 2\int_\Omega C(x)\big(u(x)-u_0(x)\big)v(x)\,dx.$$

En dérivant l'équation d'état par rapport à t on obtient l'équation vérifiée par v

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(K\nabla v) = \mathrm{div}\,(K'(\theta)\eta\nabla u) & \text{dans } \Omega,\\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega,\end{cases}$$

où K' désigne la dérivé de la fonction $\theta\to K(\theta) = R^*K_0R$ (ce calcul est formel mais se justifie en dérivant la formulation variationnelle, ce qui en particulier prouve que l'application $t\to u(\theta+t\eta)$ est dérivable en $t=0$). Pour éliminer v, on introduit l'état adjoint p, solution unique de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(K\nabla p) = 2C(u-u_0) & \text{dans } \Omega,\\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}$$

En multipliant l'équation pour p par v et celle pour v par p, et en intégrant par parties on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega K\nabla p\cdot\nabla v\,dx &= 2\int_\Omega C(u-u_0)v\,dx\\ &= -\int_\Omega K'(\theta)\eta\nabla u\cdot\nabla p\,dx.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\langle J'(\theta),\eta\rangle = -\int_\Omega K'(\theta)\eta\nabla u\cdot\nabla p\,dx.$$

Comme $K'(\theta)\nabla u\cdot\nabla p$ appartient à $L^1(\Omega)$ qui est un sous-espace de l'ensemble des formes linéaires continues sur $L^\infty(\Omega)$, on peut conclure que

$$J'(\theta) = -K'(\theta)\nabla u\cdot\nabla p.$$

2. Une condition nécessaire d'optimalité pour θ est que la dérivé s'annule, $J'(\theta)=0$, puisqu'il n'y a pas de contraintes sur l'angle. Autrement dit, en fixant les vecteurs ∇u et ∇p, l'application

$$\theta \;\to\; K(\theta)\nabla u\cdot\nabla p$$

admet un extrema en tout point x. Si ∇u ou ∇p est nul, on ne peut rien dire de l'angle θ. Sinon, on introduit deux vecteurs orthogonaux

$$a=\frac{\nabla u}{|\nabla u|}+\frac{\nabla p}{|\nabla p|},\quad b=\frac{\nabla u}{|\nabla u|}-\frac{\nabla p}{|\nabla p|},$$

et on réécrit

$$\begin{aligned}K(\theta)\nabla u\cdot\nabla p &= \frac{|\nabla u|\,|\nabla p|}{4}\big(K(\theta)a\cdot a - K(\theta)b\cdot b\big)\\ &= \frac{|\nabla u|\,|\nabla p|}{4}\big(K_0(Ra)\cdot(Ra) - K_0(Rb)\cdot(Rb)\big),\end{aligned}$$

où R est la rotation d'angle θ. Il est facile de voir que les extrema de cette fonction sont seulement des minima ou des maxima (pas de point selle) qui s'obtiennent en alignant les vecteurs Ra, Rb avec les vecteurs propres (e_1,e_2) du tenseur K_0. La condition nécessaire d'optimalité sur l'angle θ est que Ra est parallèle soit à e_1 soit à e_2 et Rb est parallèle au vecteur restant. Encore une fois, le matériau isotrope optimal s'aligne suivant une combinaison des champs de déformations de l'état et de l'état adjoint.

3. Comme algorithme numérique de minimisation on propose l'algorithme du gradient à pas fixe qui s'écrit de la manière suivante.

   (a) Initialisation de l'angle : par exemple, $\theta_0 = 0$ dans Ω.

   (b) Itérations jusqu'à convergence, pour $n\ge 0$: on calcule l'état u_n et l'état adjoint p_n avec l'angle θ_n, puis on met à jour l'angle

   $$\theta_{n+1}=\theta_n-\mu J'(\theta_n)=\theta_n+\mu K'(\theta_n)\nabla u_n\cdot\nabla p_n,$$

   où $\mu>0$ est un pas de descente fixe suffisamment petit.