ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Corrigé de l'examen écrit du 26 Mars 2003 (2 heures)

1 Question de cours sur 6 points

1. La formulation variationnelle de l'équation qui donne le déplacement u est : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega h \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Par définition le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état considérée comme une contrainte. Donc, pour tout $(h, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, on a

$$\mathcal{L}(h, v, q) = \int_\Omega g v \, dx + \int_\Omega h \nabla v \cdot \nabla q \, dx - \int_\Omega f q \, dx.$$

La formulation variationnelle de l'équation adjointe est par définition donnée par

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(h, u, p), \phi \rangle = 0 \quad \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega),$$

ce qui est équivalent à

$$\int_\Omega h \nabla p \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega g \phi \, dx = 0 \quad \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent l'état adjoint $p \in H_0^1(\Omega)$ est solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(h \nabla p) = -g & \text{dans } \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. La dérivée de la fonction objectif $J(h)$ est donnée, pour tout $k \in L^\infty(\Omega)$, par

$$\langle J'(h), k \rangle = \int_\Omega J'(h) k \, dx = \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k \rangle = \int_\Omega k \nabla u \cdot \nabla p \, dx.$$

Par conséquent, on a $J'(h) = \nabla u \cdot \nabla p$.

2 Forme d'un tambour sur 14 points

1. Le domaine dilaté est défini par $t\Omega = \{ y \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y/t \in \Omega \}$. On fait alors le changement de variable $x = y/t$ et $v(x) = u(tx)$ dans

$$\lambda(t\Omega) = \min_{u \in H_0^1(t\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{t\Omega} |\nabla u(y)|^2 dy}{\int_{t\Omega} u(y)^2 dy} = \min_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_\Omega t^{-2} |\nabla v(x)|^2 t^2 dx}{\int_\Omega v(x)^2 t^2 dx} = t^{-2} \lambda(\Omega).$$

Or pour $\ell = 0$, on a $J(\Omega) = \lambda(\Omega)$. Par conséquent, $\lim_{t \to +\infty} J(t\Omega) = 0$ mais par hypothèse $\lambda(\Omega) > 0$ pour tout $\Omega \neq \emptyset$, donc le minimum n'est pas atteint.

2. En suivant la méthode formelle du polycopié, on dérive la formulation variationnelle suivante

$$\int_\omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda(\Omega) \int_\omega u \phi \, dx$$

où ϕ est une fonction à support compact fixe ω dans Ω. On obtient ainsi

$$\int_\omega \nabla U \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda(\Omega) \int_\omega U \phi \, dx + \Lambda \int_\omega u \phi \, dx,$$

c'est-à-dire

$$-\Delta U - \lambda(\Omega) U = \Lambda u \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour obtenir la condition aux limites pour U on dérive la forme faible suivante de la condition aux limites de Dirichlet pour u

$$\int_{\partial\Omega} u \psi \, ds = 0 \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

On obtient

$$\int_{\partial\Omega} \left(U\psi + \theta \cdot n \left(\frac{\partial(u\psi)}{\partial n} + u\psi \right) \right) ds = 0,$$

ce qui donne $U = -\frac{\partial u}{\partial n} \theta \cdot n$ puisque $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

3. En multipliant l'équation pour U par u et en intégrant par parties on obtient

$$\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla u \, dx = \lambda \int_\Omega U u \, dx + \Lambda \int_\Omega u^2 \, dx.$$

En multipliant l'équation pour u par U et en intégrant par parties on obtient

$$\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla u \, dx = \lambda \int_\Omega U u \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} U \, ds.$$

On en déduit

$$\Lambda \int_\Omega u^2 dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} U \, ds = -\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \theta \cdot n \, ds.$$

4. La dérivée de la fonction objectif est

$$J'(\Omega)(\theta) = \Lambda + \ell \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \, ds = \int_{\partial\Omega} \left(\ell - \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2}{\int_\Omega u^2 dx} \right) \theta \cdot n \, ds.$$

Si $\ell = 0$ on a $J'(\Omega)(\theta) \leq 0$ dès que $\theta \cdot n \geq 0$, c'est-à-dire que l'on minimise $J(\Omega)$ si on agrandit le domaine Ω.

5. Si $\Omega = B_R$, le disque de rayon R, et si u est radiale, i.e. $u \equiv u(r)$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u'(R) e_r \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On en déduit que

$$J'(\Omega)(\theta) = \left(\ell - \frac{|u'(R)|^2}{\int_\Omega u^2 dx} \right) \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \, ds.$$

Par conséquent, comme θ est quelconque, la condition d'optimalité est satisfaite si et seulement si

$$\ell = \frac{|u'(R)|^2}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

D'après la question 1, on a $\lambda(B_R) = R^{-2}\lambda(B_1)$, et de la même manière la première fonction propre u pour B_R peut s'écrire $u(r) = u_1(r/R)$ où u_1 est la première fonction propre pour B_1. En particulier, on en déduit

$$u'(R) = R^{-1}u_1'(1) \quad \text{et} \quad \int_{B_R} u^2 dx = R^2 \int_{B_1} u_1^2 dx$$

et donc il existe un unique rayon optimal

$$R = \sqrt{\frac{u_1'(1)}{\sqrt{\ell}\int_{B_1} u_1^2}}.$$