ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Examen écrit du 30 Mars 2005 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 7 points

On considère une membrane élastique d'épaisseur variable qui au repos occupe un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le bord de ce domaine est divisé en deux parties de mesures non nulles, $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. Le déplacement vertical de la membrane est la solution $u \in H^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(h\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ h\frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ représente les forces appliquées. La membrane est d'épaisseur $h(x)$ qui appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(\Omega)\ , \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega\}\,.$$

Soit $u_0 \in L^2(\Gamma_N)$ un déplacement cible. On considère la fonction objectif

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = \int_{\Gamma_N} |u - u_0|^2 ds \right\}. \tag{2}$$

1. Donner le Lagrangien du problème et en déduire l'état adjoint.
2. Calculer la dérivée par rapport à h de la fonction objectif.

2 Optimisation géométrique : 8 points

On considère (encore !) l'optimisation d'une membrane, d'épaisseur constante, représentée par un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le bord de ce domaine est divisé en deux parties de mesures non nulles, $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. On impose une force surfacique sur Γ_N tandis que le déplacement est nul sur Γ_D. La force surfacique est d'un type très spécial : il s'agit en fait d'imposer un tenseur de contraintes donné, ou plus précisément sa composante normale. Autrement dit. le déplacement $u(x)$ est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \cdot n & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \tag{3}$$

où $g(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)^2$ est un champ de vecteur donné et n est le vecteur normal unité extérieur. Le bord Γ_D est fixe et seul Γ_N peut varier. On introduit un ensemble admissible de formes à volume constant

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \Gamma_D \subset \partial\Omega,\ |\Omega| = V \right\}.$$

On optimise la rigidité de la membrane en minimisant sa compliance

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} u\, g \cdot n \, ds \right\}. \tag{4}$$

1. Ecrire la formulation variationnelle de (3).
2. Ecrire le Lagrangien du problème de minimisation (4) et en déduire l'état adjoint.
3. Calculer (formellement) la dérivée de forme de (4). Indication : pour ne pas avoir à dériver le vecteur normal, on utilisera l'égalité suivante

$$\int_{\Gamma_N} v\, g \cdot n \, ds = \int_{\Omega} \operatorname{div}(vg)\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D.$$

3 Homogénéisation : 5 points

Soit deux matériaux conducteurs de conductivités isotropes $0 < \alpha < \beta$ que l'on mélange en proportions respectives θ et $(1-\theta)$. Soit A^* le tenseur de conductivité d'un matériau composite correspondant à un tel mélange. On suppose que A^* est isotrope, c'est-à-dire que $A^* = a^* I$ avec $a^* \in \mathbb{R}$.

1. Ecrire les bornes supérieure et inférieure de Hashin-Shtrikman pour cette conductivité isotrope a^*.
2. On suppose que les valeurs de α et β sont très proches, c'est-à-dire que $\beta = \alpha(1+\eta)$ avec $0 < \eta << 1$. En faisant un développement limité des bornes de Hashin-Shtrikman par rapport à η, montrer que l'on obtient une formule pour a^*, indépendante de la microstructure du mélange, exacte à l'ordre 2 en η (on néglige les termes en η^3 et d'ordre supérieur).