ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Examen écrit du 29 Mars 2006 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 8 points

On considère une membrane élastique d'épaisseur variable qui au repos occupe un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le bord de ce domaine est divisé en deux parties de mesures non nulles, $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. Le déplacement vertical de la membrane est la solution $u \in H^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(h\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ h\frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ représente les forces appliquées. La membrane est d'épaisseur $h(x)$ qui appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(\Omega)\ , \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega\}\,.$$

On note $\sigma = h\nabla u$ le vecteur des contraintes. Soit $\sigma_0 \in L^2(\Omega)^N$ une contrainte cible. On considère la fonction objectif

$$\inf_{h\in\mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\sigma - \sigma_0|^2 dx \right\}. \tag{2}$$

1. Donner le Lagrangien du problème et en déduire l'état adjoint.
2. Calculer la dérivée par rapport à h de la fonction objectif. Indication : on pourra utiliser la méthode du Lagrangien et on prendra garde à ne pas oublier que σ dépend de h.

2 Optimisation géométrique : 12 points

Le but de ce problème est de trouver la forme optimale d'une canalisation parcourue par un écoulement d'un fluide visqueux incompressible. On suppose que la canalisation est un cylindre infini dans la direction x_3 et de section Ω (un ouvert borné connexe) dans le plan (x_1, x_2). L'écoulement est régi par les équations de Navier Stokes

$$\begin{cases} \nabla p + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} - \Delta \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \\ \text{div}\vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \\ \vec{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

où p est la pression et $\vec{u}$ la vitesse du fluide (la densité et la viscosité ont été normalisées). Rappelons que, si u_i désigne les composantes de la vitesse $\vec{u}$, la notation $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ désigne le vecteur de composantes

$$\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

On introduit un ensemble admissible de formes, à aire constante, de la section du cylindre

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ ouvert borné connexe tel que } |\Omega| = V \right\}.$$

On veut minimiser la perte de charge dans la canalisation, c'est-à-dire que l'on veut minimiser la dissipation visqueuse par unité de longueur

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(\Omega) = \int_0^1 \int_\Omega |\nabla \vec{u}|^2 dx \right\}. \tag{4}$$

On considère un écoulement de type Poiseuille, c'est-à-dire que

$$p(x) \equiv p(x_3), \quad \vec{u}(x) \equiv u_3(x_1, x_2)\vec{e}_3$$

où p et u_3 sont des fonctions aussi régulières que nécessaire.

1. Donner l'expression de la pression et le problème aux limites que doit vérifier u_3 pour que (3) admette une solution de type Poiseuille. Dans tout ce qui suit on pourra normaliser le gradient de pression à l'unité.
2. Réécrire le problème d'optimisation (4) pour les écoulements de type Poiseuille. Montrer que la fonction objectif est du type de la compliance.
3. Ecrire le Lagrangien du problème de minimisation de la question précédente et en déduire l'état adjoint. Indication : on introduira aussi un multiplicateur de Lagrange pour la condition aux limites.
4. Calculer (formellement) la dérivée de forme de la fonction objectif (4) dans le cas des écoulements de type Poiseuille. En déduire la condition nécessaire d'optimalité.
5. Montrer que cette condition d'optimalité est vérifiée pour une section circulaire.
6. En supposant la solution aussi régulière que l'on veut, montrer que la condition d'optimalité n'est pas vérifiée par une section rectanglaire.