ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Examen écrit du 28 Mars 2007 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 7 points

On considère une membrane élastique d'épaisseur variable, fixée sur son bord, qui au repos occupe un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le déplacement vertical de la membrane est la solution $u \in H^1_0(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(h\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ représente les forces appliquées. La membrane est d'épaisseur $h(x)$ qui appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^\infty(\Omega)\ , \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega\}\,.$$

Soit $K \subset \Omega$ une partie ouverte de Ω où l'on désire que le déplacement soit le plus uniforme possible. Autrement dit, on introduit une nouvelle variable d'optimisation (indépendante de h) : une constante inconnue $c \in \mathbb{R}$ qui joue le rôle du déplacement uniforme recherché. On considère la fonction objectif

$$\inf_{h\in\mathcal{U}_{ad}, c\in\mathbb{R}} \left\{ J(h,c) = \int_K |u(x) - c|^2 dx \right\}. \tag{2}$$

1. Pour une épaisseur donnée h, trouver explicitement la meilleure constante possible c^* qui minimise $c \to J(h,c)$. Désormais on choisit toujours cette constante c^* et on minimise la fonction $J(h)$ définie par $J(h) = J(h,c^*)$.
2. Donner le Lagrangien du problème et en déduire l'état adjoint.
3. Calculer la dérivée par rapport à h de la fonction objectif $J(h)$.

2 Optimisation géométrique robuste : 13 points

On considère (encore !) l'optimisation d'une membrane, d'épaisseur constante, représentée par un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le bord de ce domaine est divisé en deux parties de mesures non nulles, $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$.

Le bord Γ_D est fixe et seul Γ_N peut varier. On introduit un ensemble admissible de formes à volume constant

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \Gamma_D \subset \partial\Omega,\ |\Omega| = V \right\}.$$

Le déplacement $u(x)$ de la membrane est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{array} \right. \tag{3}$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ représente une force volumique qui n'est pas connue avec précision. Ainsi on décompose f comme

$$f = \overline{f} + f'$$

où $\overline{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ est une force "moyenne" connue avec précision et f' est une "fluctuation" inconnue dont on sait seulement que sa norme est bornée

$$\|f'\|_{L^2(\Omega)} \leq m \tag{4}$$

où $m \geq 0$ est une constante donnée. Comme d'habitude la compliance de la membrane est

$$c(\Omega, \overline{f}, f') = \int_\Omega (\overline{f} + f') u \, dx.$$

Le problème de l'optimisation "robuste" est d'optimiser la rigidité de la membrane dans le "pire" des cas lorsque les fluctuations varient. Autrement dit, on introduit une fonction objectif

$$J(\Omega) = \sup_{\|f'\|_{L^2(\Omega)} \leq m} c(\Omega, \overline{f}, f') \tag{5}$$

et le problème de l'optimisation "robuste" est

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega). \tag{6}$$

On note V l'espace de Hilbert défini par

$$V = \{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}.$$

1. Montrer que

$$c(\Omega, \overline{f}, f') = \max_{v \in V} \left(2 \int_\Omega (\overline{f} + f') v \, dx - \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right).$$

En déduire que

$$J(\Omega) = \max_{v\in V}\left(2\int_\Omega \overline{f} v\, dx + 2m\|v\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right). \qquad (7)$$

On admettra que (7) admet un unique maximisateur $u^* \in V$ qui est non nul.

2. Montrer que u^* est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u^* = \overline{f} + \frac{m\, u^*}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}} & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^*}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u^* = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \qquad (8)$$

En déduire que

$$J(\Omega) = \int_\Omega \overline{f} u^*\, dx + m\|u^*\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (9)$$

3. Quel problème classique obtient-on lorsque $m = 0$?
4. On suppose dans cette question seulement que $\overline{f} \equiv 0$ et $m > 0$. Déduire de (8) que $\lambda = \frac{m}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}}$ est une valeur propre et u^* une fonction propre. Déduire de (7) qu'il s'agit de la plus petite valeur propre. A quel problème classique correspond (6) dans ce cas ?
5. Ecrire la formulation variationnelle de (8). (On traitera le coefficient $m/\|u^*\|_{L^2(\Omega)}$ dans (8) comme une constante indépendante de u^*.)
6. En utilisant (8) et (9) écrire le Lagrangien du problème et en déduire l'équation pour l'état adjoint p. Vérifier que $p = -u^*$ (ou $p = +u^*$ selon la convention de signe choisie dans le Lagrangien) est la solution de l'équation adjointe.
7. Calculer (formellement) la dérivée de forme de $J(\Omega)$. On rappelle que seul le bord Γ_N est variable.
8. On suppose que $\overline{f} = 0$ sur Γ_N. Interpréter la condition d'optimalité que l'on vient d'obtenir.

Indication : la dérivée de la fonction $v \to \|v\|_{L^2(\Omega)}$ dans la direction ϕ est $\|v\|^{-1}_{L^2(\Omega)} \int_\Omega v\phi\, dx$, tandis que la dérivée de forme de $\Omega \to \|v\|_{L^2(\Omega)}$ dans la direction θ est $\frac{1}{2}\|v\|^{-1}_{L^2(\Omega)} \int_{\Gamma_N} v^2 \theta \cdot n\, ds$.