ECOLE POLYTECHNIQUE
Programme d'Approfondissement MAP
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Examen écrit du 17 Mars 2010 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 7 points

On considère une membrane élastique d'épaisseur variable, fixée sur son bord, qui au repos occupe un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Cette membrane peut être soumise à deux forces différentes $f_i \in L^2(\Omega)$ avec $i = 1, 2$. Dans chaque cas le déplacement vertical de la membrane est la solution $u_i \in H_0^1(\Omega)$ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathrm{div}\,(h\nabla u_i) = f_i & \text{dans } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

La membrane est d'épaisseur $h(x)$ qui appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ h \in L^\infty(\Omega) \, , \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega \} \, .$$

On se donne une constante $\alpha \in \mathbb{R}$. On désire optimiser la membrane afin que les deux déplacements u_1 et u_2 soient proportionnels de rapport α, autant que faire se peut. Pour cela on considère la fonction objectif

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = \int_\Omega |u_1(x) - \alpha u_2(x)|^2 dx \right\} . \quad (2)$$

1. Donner le Lagrangien du problème et en déduire les états adjoints.
2. Calculer la dérivée par rapport à h de la fonction objectif $J(h)$.
3. Quelle simplification peut-on réaliser dans le calcul de l'état adjoint qui permette de minimiser le temps de calcul de l'adjoint ? Que se passerait-il si la constante de proportionnalité était une fonction $\alpha(x)$ variant sur Ω ?

2 Optimisation géométrique : 6 points

Dans un domaine fixe Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$) on considère une force donnée $f \in L^2(\Omega)$. On localise cette force dans un sous-domaine $\omega \subset \Omega$ de fonction caractéristique χ_ω, c'est-à-dire que $\chi_\omega(x) = 1$ si $x \in \omega$ et $\chi_\omega(x) = 0$ si $x \notin \omega$. On calcule le déplacement $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \chi_\omega f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3)$$

On optimise le sous-domaine ω de manière à minimiser la fonction objectif

$$\inf_{\omega \subset \Omega} \left\{ J(\omega) = \int_\Omega |u(x) - u_0(x)|^2 dx \right\}, \tag{4}$$

où $u_0 \in L^2(\Omega)$ est un déplacement cible.

Calculer (formellement) la dérivée de forme, par rapport à ω de cette fonction objectif.

3 Homogénéisation : 7 points

On considère un matériau anisotrope conducteur de la chaleur dans le plan. On note $A = \mathrm{diag}(\alpha, \beta)$ son tenseur de conductivité avec $0 < \alpha < \beta$. On fabrique un composite laminé simple en mélangeant A et sa rotation de $90°$ que l'on note $A^\perp = \mathrm{diag}(\beta, \alpha)$. La direction de lamination est le premier vecteur e_1 de la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ et la proportion de A est $\theta \in [0, 1]$ (celle de $A^\perp$ est $1 - \theta$). Le tenseur homogénéisé de ce laminé simple est noté $A^*(\theta)$.

1. Est-il possible que $A^*(\theta)$ soit isotrope ? Si oui, donner les valeurs possibles de θ et $A^*(\theta)$. Si non, justifier votre réponse.
2. Dans un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$) on considère une source $f \in L^2(\Omega)$ et on calcule la température $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A^*(\theta)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Le paramètre de forme est la proportion $\theta(x)$ qui appartient à l'ensemble admissible $L^\infty(\Omega; [0, 1])$. On désire optimiser le matériau laminé simple $A^*(\theta)$ (dont les axes principaux sont **fixes**) pour minimiser la fonction objectif

$$\inf_{\theta \in L^\infty(\Omega;[0,1])} \left\{ J(\theta) = \int_\Omega |u(x) - u_0(x)|^2 dx \right\}, \tag{6}$$

où $u_0 \in L^2(\Omega)$ est une distribution cible de température. Calculer la dérivée par rapport à θ de cette fonction objectif.