ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures
Cours de G. Allaire
Examen écrit du 20 Mars 2002 (2 heures)

Tous documents autorisés. Aucun calcul lourd n'est véritablement nécessaire pour répondre aux questions de ce problème.

On considère une membrane élastique qui au repos occupe un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le déplacement vertical de la membrane est la solution $u(x)$ de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(K(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où f représente les forces appliquées (on prend $f \in L^2(\Omega)$). La membrane est constituée d'un matériau élastique anisotrope (par exemple, un matériau composite fibré) dont le tenseur d'élaticité dans un repère adapté est

$$K_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

où $0 < \alpha < \beta$ sont les rigidités dans chacune des directions principales de ce matériau. Le tenseur d'élasticité $K(x)$ est alors obtenu par rotation du matériau anisotrope (dépendant du point courant x)

$$K(x) = R^*(x) K_0 R(x) \quad \text{avec} \quad R(x) = \begin{pmatrix} \cos\theta(x) & -\sin\theta(x) \\ \sin\theta(x) & \cos\theta(x) \end{pmatrix},$$

où R^* désigne la matrice adjointe de R. Le but du problème est d'optimiser la membrane en faisant varier la rotation du matériau anisotrope, paramétrée par l'angle $\theta(x)$.

L'ensemble admissible des rotations est

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\theta \in L^\infty(\Omega; [0, \pi])\}.$$

On considère deux fonctions objectifs : d'une part la compliance

$$\inf_{\theta \in \mathcal{U}_{ad}} J(\theta) = \int_\Omega f(x) u(x)\, dx, \tag{2}$$

et d'autre part un critère de moindres carrés

$$\inf_{\theta \in \mathcal{U}_{ad}} J(\theta) = \int_\Omega C(x)\, |u(x) - u_0(x)|^2 dx, \tag{3}$$

où $C(x)$ est une fonction régulière donnée et $u_0(x) \in L^2(\Omega)$ est un déplacement cible.

(I) Minimisation de la compliance

Dans cette partie on minimise la fonction objectif (2).

1. Soit un vecteur constant $\tau \in \mathbb{R}^2$. On se place en un point fixé $x \in \Omega$. Trouver un angle $\theta(x)$ qui minimise $K(x)^{-1}\tau \cdot \tau$, le caractériser explicitement.
2. En écrivant la compliance comme le minimum de l'énergie complémentaire, donner une condition nécessaire d'optimalité du problème (2).
3. En déduire une solution explicite de (2). Commenter le résultat.
4. Généraliser la condition d'optimalité au cas multi-chargement, c'est-à-dire si, au lieu de (2), on minimise

$$\inf_{\theta \in \mathcal{U}_{ad}} J(\theta) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} f_i(x) u_i(x)\, dx,$$

   où u_i est la solution de (1) pour une force f_i. On utilisera à nouveau l'énergie complémentaire et on utilisera la matrice $T = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \otimes \tau_i$ où les τ_i sont les contraintes de chaque chargement.

(II) Minimisation du critère de moindres carrés

Dans cette partie on minimise la fonction objectif (3).

1. Calculer le gradient de la fonction objectif dans $\mathcal{U}_{ad}$ (on introduira un état adjoint pour cela).
2. En déduire une condition nécessaire d'optimalité pour l'angle $\theta(x)$ optimal (s'il existe), et en déduire les valeurs possibles (explicites) de l'angle optimal.
3. Proposer et décrire de manière détaillée un algorithme numérique pour minimiser (3).