ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Examen écrit du 26 Mars 2003 (2 heures)

1 Question de cours (ou presque) : 6 points

On considère une membrane élastique qui au repos occupe un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le déplacement vertical de la membrane est la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathrm{div}\,(h\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ représente les forces appliquées. La membrane est d'épaisseur $h(x)$ qui appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ h \in L^\infty(\Omega) \ , \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega \} \, .$$

On considère la fonction objectif

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = \int_\Omega g(x) u(x) \, dx \right\} , \tag{2}$$

où $g(x) \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée.

1. Donner le Lagrangien du problème et en déduire l'état adjoint.
2. Calculer la dérivée par rapport à h de la fonction objectif.

2 Forme d'un tambour : 14 points

Un tambour est constitué d'une membrane élastique fixée sur son bord et d'une caisse de résonance (qu'on néglige par la suite). On cherche à optimiser la forme du tambour afin qu'il produise le son le plus grave possible. On note Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$) le domaine plan occupé par la membrane au repos. Le carré de la fréquence du son émis est une valeur propre $\lambda(\Omega)$ du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda(\Omega) u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3}$$

où $u(x)$ est une fonction propre (non nulle) qui représente le déplacement vertical correspondant de la membrane. On s'intéresse uniquement au mode fondamental, c'est-à-dire à la plus petite valeur propre $\lambda(\Omega)$ de (3) qui est aussi donnée par la formule

$$\lambda(\Omega) = \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}. \tag{4}$$

On admettra que le minimum dans (4) est atteint, que (3) est l'équation d'Euler associée, et que $\lambda(\Omega) > 0$ dès que $\Omega \neq \emptyset$. On étudie donc

$$\inf_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} \left(\lambda(\Omega) + \ell \int_\Omega dx \right), \tag{5}$$

où $\ell \geq 0$ est un multiplicateur de Lagrange fixé pour une contrainte sur l'aire de la membrane.

1. Pour $t > 0$ on définit le domain dilaté $t\Omega$. Calculer $\lambda(t\Omega)$ en fonction de $\lambda(\Omega)$. En déduire que, si $\ell = 0$ (pas de contrainte d'aire), alors le minimum dans (5) est nul et n'est donc pas atteint.
2. On fait varier le domaine sous la forme $\Omega_\theta = (I + \theta)\Omega$ où θ est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que la solution (u, λ) de (3) est différentiable par rapport au domaine et on note

$$U = \langle u', \theta \rangle \quad \text{et} \quad \Lambda = \langle \lambda', \theta \rangle$$

   les dérivées (de forme ou eulériennes) dans la direction θ de u et λ respectivement. Montrer formellement que

$$\begin{cases} -\Delta U - \lambda(\Omega) U = \Lambda u & \text{dans } \Omega, \\ U = -\frac{\partial u}{\partial n} \theta \cdot n & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

3. Multiplier (6) par u et (3) par U pour en déduire que

$$\Lambda = \frac{-\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \theta \cdot n \, ds}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

4. En déduire (sans utiliser d'état adjoint) la dérivée par rapport au domaine de la fonction objectif (5). Vérifier que si $\ell = 0$ on a toujours intérêt à agrandir la forme.
5. Si $\ell > 0$, montrer que, parmi les formes Ω qui sont des disques B_R de rayon R, il existe un unique disque qui vérifie la condition d'optimalité de (5). On calculera le rayon de ce disque optimal en fonction de ℓ et de la solution u_1 sur le disque unité B_1. On admettra que, si Ω est un disque, la première fonction propre u est radiale.

   (En fait, on peut montrer que, parmi toute les formes possibles, seul le disque trouvé ci-dessus minimise (5), mais c'est plus long...)