Ecole polytechnique, 3ème année, MAP-MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Corrigé de l'examen écrit du 15 Février 2016 (2 heures)

Les problèmes I et II sont indépendants.

Corrigé du problème I

1) Pour les vitesses négatives $\mu^k < 0$ le schéma décentré amont s'écrit

$$\frac{u_{j,k}^n - u_{j,k}^{n-1}}{\Delta t} + \mu^k \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j,k}^n}{\Delta x} + \sigma(u_{j,k}^n - < u_j^n >) = 0$$

2) On range dans le vecteur u^n les inconnues $u_{j,k}^n$ en faisant se suivre les composantes en k à indice j fixé. On note $K' = 2K$. On obtient ainsi une matrice M à la structure bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & -s\,\mathrm{Id} & \cdots & \cdots & -s\,\mathrm{Id} \\ -s\,\mathrm{Id} & A_{22} & -s\,\mathrm{Id} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & -s\,\mathrm{Id} & A_{K'-1\,K'-1} & -s\,\mathrm{Id} \\ -s\,\mathrm{Id} & \cdots & \cdots & -s\,\mathrm{Id} & A_{K'K'} \end{pmatrix} \text{ avec } s = \sigma\Delta t/K',$$

avec les blocs diagonaux de taille $N \times N$ donnés, lorsque $\mu_k > 0$, par

$$A_{kk} = \begin{pmatrix} 1+\Delta t\sigma + c_k - s & 0 & & & 0 \\ -c_k & 1+\Delta t\sigma + c_k - s & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -c_k & 1+\Delta t\sigma + c_k - s & 0 \\ 0 & & & -c_k & 1+\Delta t\sigma + c_k - s \end{pmatrix}$$

avec $c_k = \frac{\mu_k \Delta t}{\Delta x}$, et lorsque $\mu_k < 0$,

$$A_{kk} = \begin{pmatrix} 1+\Delta t\sigma - c_k - s & c_k & & & 0 \\ 0 & 1+\Delta t\sigma - c_k - s & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+\Delta t\sigma - c_k - s & c_k \\ 0 & & & 0 & 1+\Delta t\sigma - c_k - s \end{pmatrix}$$

3) On vérifie aisément que M est une M-matrice stricte puisque ses coefficients extra-diagonaux sont négatifs (on a $c_k > 0$ si $\mu_k > 0$ et $-c_k > 0$ si $\mu_k < 0$) et la somme des coefficients sur une même ligne est supérieure à $1 + \Delta t\sigma(K'-1)/K'$. D'après le cours, on sait qu'une M-matrice stricte est inversible donc le schéma est bien défini.

4) On vérifie aisément sur sa structure bloc que la matrice M est irréductible. D'après le cours encore, on sait qu'une M-matrice inversible irréductible possède un inverse positif. Par conséquent,

$$u^n = (M^{-1})^{n+1} u^0$$

qui est positif puisque la donnée initiale l'est.

5) Si $\mu_k > 0$, en sommant sur j le schéma on obtient

$$\frac{\sum_{j=1}^N (u_{j,k}^n - u_{j,k}^{n-1})}{\Delta t} + \mu^k \frac{u_{N,k}^n - u_{0,k}^n}{\Delta x} + \sigma \sum_{j=1}^N (u_{j,k}^n - < u_j^n >) = 0\,.$$

On utilise alors la condition aux limites $u_{0,k}^n = 0$ et la positivité de la solution pour en déduire

$$\frac{\sum_{j=1}^N (u_{j,k}^n - u_{j,k}^{n-1})}{\Delta t} + \sigma \sum_{j=1}^N (u_{j,k}^n - < u_j^n >) \leq 0\,.$$

Un calcul symétrique fonctionne conduit à la même inégalité lorsque $\mu^k < 0$.

En sommant alors sur k on obtient

$$\frac{\sum_{j=1}^N (< u_j^n > - < u_j^{n-1} >)}{\Delta t} \leq 0\,.$$

Comme la solution est positive on en déduit la stabilité L^1 au sens où

$$\sum_{j=1}^N \sum_k |u_{j,k}^n| \leq \sum_{j=1}^N \sum_k |u_{j,k}^0|$$

6) Un calcul facile (fait en cours) montre que le schéma est consistant et précis d'ordre 1 en temps et en espace. Par application du théorème de Lax, on déduit de la stabilité (prouvée à la question précédente) que le schéma converge en norme L^1 en espace.

Corrigé du problème II

1) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et presque tout $\mu \in [-1, 1]$

$$\partial_t \hat{f}(t, k, \mu) + (1 + i2\pi k\mu)\hat{f}(t, k, \mu) = \langle \hat{f} \rangle (t, k)\,.$$

2) La méthode de variation de la constante montre que

$$\hat{f}(t, k, \mu) = e^{-t(1+i2\pi k\mu)} \hat{\rho}^{in}(k) + \int_0^t e^{-(t-s)(1+i2\pi k\mu)} \langle \hat{f} \rangle (s, k) ds\,.$$

3) En faisant $k = 0$ dans l'équation trouvée au 1)

$$\partial_t \hat{f}(t, 0, \mu) = \langle f \rangle (t, 0) - f(t, 0, \mu)\,,$$

puis en moyennant en μ les deux membres de cette égalité,

$$\partial_t \hat{\rho}(t, 0) = 0\,,$$

d'où

$$\hat{\rho}(t, 0) = \hat{\rho}^{in}(0) = \int_0^1 \rho^{in}(x) dx\,.$$

Cette égalité traduit la conservation du nombre total de particules.

4) En moyennant en μ chaque membre de l'égalité obtenue au 2), on trouve que

$$\hat{\rho}(t, k) = e^{-t} S(2\pi kt) \hat{\rho}^{in}(k) + \int_0^t e^{-(t-s)} S(2\pi k(t-s)) \hat{\rho}(s, k) ds\,.$$

Donc

$$M(t, k) := e^{-t} S(2\pi kt)\,, \quad \hat{P}(t, k) := M(t, k)\hat{\rho}^{in}(k)\,.$$

5) Multipliant chaque membre de l'équation intégrale obtenue au 4) par $e^{\alpha t}$, il vient

$$e^{\alpha t}\hat{\rho}(t,k) - \int_0^t e^{\alpha(t-s)} M(t-s,k)(e^{\alpha s}\hat{\rho}(s,k))ds = e^{\alpha t}\hat{P}(t,k)\,.$$

6) On a

$$\begin{aligned}\left|e^{\alpha t}\int_0^t M(t-s,k)u(s)ds\right| &\le \sup_{s\ge 0} e^{\alpha s}|u(s)| \sup_{t\ge 0}\int_0^t e^{(\alpha-1)(t-s)}|S(2\pi k(t-s))|ds\\ &= \sup_{s\ge 0} e^{\alpha s}|u(s)| \int_0^\infty e^{(\alpha-1)t}|S(2\pi kt)|dt\,.\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{(\alpha-1)t}|S(2\pi kt)|dt &= \int_0^{1/2|k|} e^{(\alpha-1)t}|S(2\pi kt)|dt + \int_{1/2|k|}^\infty e^{(\alpha-1)t}|S(2\pi kt)|dt\\ &\le \int_0^{1/2|k|} e^{(\alpha-1)t}dt + \int_{1/2|k|}^\infty \frac{e^{(\alpha-1)t}}{2\pi|k|t}dt\\ &\le \frac{1}{2|k|} + \frac{e^{-(1-\alpha)/2|k|}}{\pi(1-\alpha)} \le \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\pi(1-\alpha)}\,.\end{aligned}$$

7) D'après 5)

$$\sup_{t>0} e^{\alpha t}|\hat{\rho}(t,k)|\left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{\pi(1-\alpha)}\right) \le \sup_{t>0} e^{\alpha t}|\hat{P}(t,k)| \le |\hat{\rho}^{in}(k)|\,,$$

d'où

$$|\hat{\rho}(t,k)| \le C_\alpha e^{-\alpha t}|\hat{\rho}^{in}(k)|\,,$$

avec

$$C_\alpha := \left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{\pi(1-\alpha)}\right)^{-1}$$

lorsque $1-\alpha > \frac{2}{\pi}$.

8) D'après l'égalité de Parseval

$$\begin{aligned}\left\|\rho(t,\cdot) - \int_0^1 \rho^{in}(y)dy\right\|^2_{L^2(0,1)} &= \sum_{k\ne 0}|\hat{\rho}(t,k)|^2\\ \le C_\alpha^2 e^{-2\alpha t}\sum_{k\ne 0}|\hat{\rho}^{in}(k)|^2 &= C_\alpha^2 e^{-2\alpha t}\|\rho^{in}\|^2_{L^2(0,1)}\,.\end{aligned}$$

9) D'après le 2) et le 7), pour tout $\alpha\in[0,1-\frac{2}{\pi}[$ et pour tout $k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$, on a

$$\begin{aligned}|\hat{f}(t,k,\mu)| &\le e^{-t}|\hat{\rho}^{in}(k)| + \int_0^t e^{-(t-s)}|\hat{\rho}(s,k)|ds\\ &\le |\hat{\rho}^{in}(k)|\left(e^{-t} + C_\alpha\int_0^t e^{-(t-s)}e^{-\alpha s}ds\right)\\ &= |\hat{\rho}^{in}(k)|e^{-t}\left(1 + C_\alpha\frac{e^{(1-\alpha)t}-1}{1-\alpha}\right)\\ &\le C'_\alpha e^{-\alpha t}|\hat{\rho}^{in}(k)|\,,\end{aligned}$$

avec

$$C'_\alpha := 1 + \frac{C_\alpha}{1-\alpha}\,.$$

On conclut avec l'égalité de Parseval :

$$\begin{aligned}\left\| f(t,\cdot,\cdot) - \int_0^1 \rho^{in}(y)dy \right\|^2_{L^2([0,1]\times[-1,1])} &= \sum_{k\neq 0} \tfrac{1}{2} \int_{-1}^1 |\hat{f}(t,k,\mu)|^2 d\mu \\ &\leq (C'_\alpha)^2 e^{-2\alpha t} \sum_{k\neq 0} |\hat{\rho}^{in}(k)|^2 \,.\end{aligned}$$