ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP/MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Corrigé de l'examen écrit du 17 Mars 2010 (2 heures)

1 Schéma numérique

1. Tout d'abord on remarque que la deuxième ligne du schéma est identique à la première si on remplace n par $n+1/2$ et j par $j-1/2$. Par conséquent il suffit de vérifier la consistance et la précision sur la première ligne seulement. On calcule l'erreur de troncature du schéma

$$E = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + a\frac{u(t_{n+1/2}, x_{j+1/2}) - u(t_{n+1/2}, x_{j-1/2})}{\Delta x}$$

pour trouver, en faisant un développement de Taylor autour du point (t_n, x_j),

$$E = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2\right).$$

Si u est solution de $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ elle vérifie aussi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0$$

ce qui prouve que le schéma est consistant et d'ordre 2 au moins.

2. Puisque la seconde ligne du schéma est identique à la première, à une translation en n et j près, on vérifie la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann dans la première ligne seulement. On considère une solution discrète du type

$$u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi kj\Delta x}.$$

Par commodité on pose $A(k) = B(k)^2$ et on injecte cette expression dans la formule du schéma. On trouve que cette expression est solution du schéma si et seulement si on a

$$B(k)^2 + 2i\frac{a\Delta t}{\Delta x}\sin(\pi k\Delta x)B(k) - 1 = 0.$$

Le discriminant de ce polynôme du deuxième degré est

$$\Delta = 2\sqrt{1 - \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\sin(\pi k\Delta x)\right)^2}$$

qui est réel et positif sous la condition $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Dans ce cas les racines du polynôme sont

$$B(k) = -i\frac{a\Delta t}{\Delta x}\sin(\pi k\Delta x) \pm \Delta/2$$

dont le module au carré est

$$|B(k)|^2 = \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\sin(\pi k\Delta x)\right)^2 + 1 - \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\sin(\pi k\Delta x)\right)^2 = 1.$$

On a donc $|B(k)| = 1$, c'est-à-dire que $|A(k)| \leq 1$ et la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann est satisfaite.

2 M-matrice

On considère le schéma implicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} - \nu\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

qui peut s'écrire avec $b = a\Delta t/\Delta x$ et $c = \nu\Delta t/(\Delta x)^2$

$$u_j^{n+1}(1 + b + 2c) - u_{j-1}^{n+1}(b + c) - u_{j+1}^{n+1}c = \Delta t u_j^n.$$

Le maillage est $(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$ avec $\Delta t = 1/N$ et $1 \leq j \leq N$. Les conditions aux limites de périodicité font que $u_{N+j}^n = u_j^n$ pour tout j. Si u^n est le vecteur de composantes u_j^n alors le schéma s'écrit aussi $Au^{n+1} = u^n$ où A est une matrice $N \times N$

$$A = \begin{pmatrix} 1+b+2c & -c & 0 & -c \\ -b-c & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -c \\ -c & 0 & -b-c & 1+b+2c \end{pmatrix}.$$

Comme $b > 0$ et $c > 0$ les coefficients diagonaux sont strictement positifs et les coefficients extra-diagonaux sont négatifs. Par ailleurs la somme des coefficients sur une même ligne est égale à 1. Par conséquent A est une M-matrice stricte. Le Lemme 6.2.3 du polycopié nous assure alors que A est inversible. D'autres part, la matrice A est clairement irréductible comme l'est la matrice de discrétisation du Laplacien (voir l'Exercice 6.4 du polycopié). Finalement, le Lemme 6.2.7 affirme que l'inverse d'une M-matrice inversible irréductible est positive. Par conséquent $u^{n+1} = A^{-1}u^n$ est positif si u^n l'est et, par récurrence, si u^0 est positif. On a donc démontré le principe du maximum discret pour le schéma ci-dessus.

3 Equation de transport

1. On a

$$\frac{\partial}{\partial t}(wf^2) + v\cdot\nabla_x(wf^2) = \frac{dw}{dt}f^2 + 2wf\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\cdot\nabla_x\right)f = -f^2 + 2wfF\,.$$

Donc la fonction wf^2 est solution du problème

$$(3)\quad\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + v\cdot\nabla_x\right)(wf^2) = 2wfF - f^2\,, & (t,x,v)\in]0,T[\times\Omega\times\mathbf{R}^N\,,\\[2ex] wf^2(t,x,v) = 0\,,\quad v\cdot n_x < 0\,, & (t,x,v)\in]0,T[\times\partial\Omega\times\mathbf{R}^N\,,\\[2ex] wf^2\big|_{t=0} = 0\,.\end{cases}$$

2. Soient $V = (1,v)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$ et $\mathcal{O} =]0,T[\times\Omega$. On note $\nu_{t,x}$ le vecteur normal extérieur unitaire à $\mathcal{O}$ au point $(t,x)\in\partial\mathcal{O}$. On note également $dS(t,x)$ l'élément de surface sur $\partial\mathcal{O}$ et $d\sigma(x)$ celui sur $\partial\Omega$. Ainsi

$$\begin{cases}\nu_{0,x} = (-1,0)\,, & x\in\Omega\,,\\ \nu_{t,x} = (0,n_x)\,, & x\in\partial\Omega\,,\ 0<t<T\,,\\ \nu_{T,x} = (+1,0)\,, & x\in\Omega\,.\end{cases}$$

On a alors, pour tout $v\in\mathbf{R}^N$,

$$\mathrm{div}_{t,x}(wf^2(t,x,v)V) = 2wfF - f^2$$

de sorte qu'en appliquant la formule de Green au champ de vecteurs wf^2V dans l'ouvert $\mathcal{O}$, on trouve que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}}\mathrm{div}_{t,x}(wf^2(t,x,v)V)dxdt &= \int_{\partial\mathcal{O}} wf^2(t,x,v)V\cdot\nu_{t,x}dS(t,x)\\ &= \int_{\mathcal{O}}(2wfF - f^2)(t,x,v)dxdt\,.\end{aligned}$$

Or en tenant compte des conditions aux limites de (3), et du fait que $w(T) = 0$, on trouve que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{O}} wf^2(t,x,v)V\cdot\nu_{t,x}dS(t,x) &= \int_\Omega wf^2(T,x,v)dx - \int_\Omega wf^2(0,x,v)dx\\ &\quad + \int_0^T\int_{\partial\Omega} wf^2(t,x,v)v\cdot n_x d\sigma(x)dt\\ &= \int_0^T\int_{\substack{x\in\partial\Omega\\ v\cdot n_x>0}} wf^2(t,x,v)v\cdot n_x d\sigma(x)dt \geq 0\end{aligned}$$

de sorte que

$$\int_{\mathcal{O}} (2wfF - f^2)(t,x,v)dxdt \geq 0\,.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} f^2(t,x,v)dxdt &\leq \int_{\mathcal{O}} 2wfF(t,x,v)dxdt \\ &\leq 2\|w\|_{L^\infty}\|F(\cdot,\cdot,v)\|_{L^2(\mathcal{O})}\|f(\cdot,\cdot,v)\|_{L^2(\mathcal{O})}\end{aligned}$$

d'où, pour tout $v \in \mathbf{R}^N$,

$$\int_{\mathcal{O}} f^2(t,x,v)dxdt \leq 2T \int_{\mathcal{O}} F^2(t,x,v)dxdt\,.$$

3. On applique la formule de Green comme dans la question 2), ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} (2wgF - g^2)(t,x,v)dxdt &= \int_{\partial\mathcal{O}} wg^2(t,x,v)V\cdot\nu_{t,x}dS(t,x) \\ &= \int_{\Omega} wg^2(T,x,v)dx - \int_{\Omega} wg^2(0,x,v)dx \\ &+ \int_0^T\int_{\partial\Omega} wg^2 v\cdot n_x d\sigma(x)dt \\ &= \int_0^T\int_{\partial\Omega} wg^2 v\cdot n_x d\sigma(x)dt\,.\end{aligned}$$

Intégrons ensuite par rapport à v :

$$\int_{\mathcal{O}} (2wgF - g^2)(t,x,v)dvdxdt = \int_0^T \iint_{\partial\Omega\times\mathbf{R}^N} wg^2(t,x,v)v\cdot n_x dvd\sigma(x)dt\,.$$

Dans l'intégrale au membre de droite, on fait, pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\partial\Omega$, le changement de variables $u = v - 2(v\cdot n_x)n_x$ — c'est à dire la réflexion spéculaire du vecteur vitesse sur le plan tangent à $\partial\Omega$ au point x. Cette transformation étant une isométrie, elle laisse invariante la mesure de Lebesgue dv ; en revanche, $u\cdot n_x = -v\cdot n_x$, de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N} wg^2(t,x,v)v\cdot n_x dv &= -\int_{\mathbf{R}^N} wg^2(t,x,u-2(u\cdot n_x)n_x)u\cdot n_x du \\ &= -\int_{\mathbf{R}^N} wg^2(t,x,u)u\cdot n_x du = 0\end{aligned}$$

d'après la condition aux limites de réflexion vérifiée par g. On en déduit que

$$\int_{\mathcal{O}} (2wgF - g^2)(t,x,v)dvdxdt = 0$$

et on conclut comme dans la question 2).

4. L'idée consiste à multiplier chaque membre de l'équation vérifiée par f par $pw|f|^{p-1}\text{sign}(f)$ — où on rappelle que $\text{sign}(z) = +1$ si $z > 0$, -1 si $z < 0$ et (par exemple) 0 si $z = 0$ — et à écrire que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x\right) |f|^p = p|f|^{p-1}\text{sign}(f) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x\right) f\,.$$

Malheureusement, la fonction $z \mapsto |z|$ n'est pas de classe C^1, de sorte que le calcul ci-dessus n'est pas légitime pour $p = 1$. Il faut donc régulariser la fonction valeur absolue dans le seul cas $p = 1$.

Dans ce qui suit, on a régularisé la valeur absolue systématiquement de façon à ne pas devoir distinguer le cas $p = 1$.

Pour $n \geq 1$, on définit ϕ_n comme étant la fonction impaire sur $\mathbf{R}$ telle que $\phi_n(z) = \min(1, nz)$ pour $z \geq 0$, et

$$\Phi_n(z) = \int_0^z \phi_n(\zeta) d\zeta\,.$$

Pour tout $n \geq 1$, la fonction $\Phi_n \in C^1(\mathbf{R})$; d'autre part

$$0 \leq \Phi_n(z) \leq |z|\,, \quad \text{ et } \Phi_n(z) \to |z|$$

en croissant lorsque $n \to +\infty$.

Pour tout $p \geq 1$, on vérifie que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(w\Phi_n(f)^p) + v \cdot \nabla_x(w\Phi_n(f)^p) &= \frac{dw}{dt}\Phi_n(f)^p \\ &+ pw\Phi_n(f)^{p-1}\phi_n(f) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x\right) f \\ &= pw\Phi_n(f)^{p-1}\phi_n(f)F - \Phi_n(f)^p\,.\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green comme dans la question 1), on trouve que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} \Phi_n(f)^p(t,x,v)dxdt &\leq p \int_{\mathcal{O}} w\Phi_n(f)^{p-1}\phi_n(f)F(t,x,v)dxdt \\ &\leq p\|w\|_{L^\infty} \int_{\mathcal{O}} \Phi_n(f)^{p-1}|F|(t,x,v)dxdt \\ &\leq pT\|\Phi_n(f)^{p-1}\|_{L^{p'}(\mathcal{O})}\|F\|_{L^p(\mathcal{O})} \\ &= pT\|\Phi_n(f)\|^{p-1}_{L^p(\mathcal{O})}\|F\|_{L^p(\mathcal{O})}\end{aligned}$$

où la seconde inégalité découle du fait que $|\phi_n(f)| \leq 1$ par construction, tandis que la troisième découle de l'inégalité de Hölder avec $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = +\infty$ si $p = 1$.

Au total

$$\int_{\mathcal{O}} \Phi_n(f)^p(t,x,v)dxdt \leq pT \int_{\mathcal{O}} |F|^p(t,x,v)dxdt\,.$$

Par convergence monotone

$$\int_{\mathcal{O}} \Phi_n(f)^p(t,x,v)dxdt \to \int_{\mathcal{O}} |f|^p(t,x,v)dxdt$$

lorsque $n \to +\infty$, de sorte que

$$\int_{\mathcal{O}} |f|^p(t,x,v)dxdt \leq pT \int_{\mathcal{O}} |F|^p(t,x,v)dxdt\,.$$

Le cas de la fonction g se traite de manière identique.