ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP/MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Corrigé de l'examen écrit du 18 Mars 2019 (2 heures)

1 Equation de Boltzmann linéaire : 12 points

Soient $\ell, \sigma > 0$ et $\gamma > -1$. On considère l'opérateur de Boltzmann linéaire

$$Af(x,\mu) := -\mu\partial_x f(x,\mu) - \sigma f(x,\mu) + \sigma(1+\gamma)\langle f\rangle(x)$$

où

$$\langle\phi\rangle := \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\phi(\mu)d\mu\,.$$

On étudie le problème aux valeurs propres

$$(VP) \qquad\qquad Af(x,\mu) = \lambda f(x,\mu)$$

dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ des fonctions mesurables $f \equiv f(x,\mu)$ sur $\mathbf{R}\times[-1,1]$ vérifiant

$$f(x+2\ell,\mu) = f(x,\mu) \text{ p.p. en } x,\mu\,, \quad \text{et} \quad \int_{-\ell}^{\ell}\int_{-1}^{1}|f(x,\mu)|^2 d\mu dx < \infty\,.$$

Pour tout $f \in \mathfrak{H}$, on notera

$$\hat{f}(k,\mu) := \int_{-\ell}^{\ell} e^{-i\pi ky/\ell} f(y,\mu)dy\,.$$

On rappelle que toute fonction de $\mathfrak{H}$ s'écrit

$$f(x,\mu) = \frac{1}{2\ell}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{f}(k,\mu)e^{i\pi kx/\ell}\,,$$

la série étant convergente dans $\mathfrak{H}$.
(1) Si $\lambda = -\sigma$, on a

$$\mu\partial_x f(x,\mu) = \sigma(1+\gamma)\langle f\rangle(x)$$

de sorte que $\partial f(k,\mu)$ est de la forme

$$\partial f(x,\mu) = \frac{a(x)}{\mu}\,, \quad \mu \neq 0\,.$$

Donc f est de la forme

$$f(x,\mu) = C(\mu) + \frac{A(x)}{\mu}\,, \quad \mu \neq 0\,.$$

Aucune fonction de cette forme n'est continue sur $\mathbf{R}\times[-1,1]$.
(2) On rappelle que $\widehat{\partial_x f}(k,\mu) = i\frac{\pi}{\ell}k\hat{f}(k,\mu)$. Donc

$$\lambda\hat{f}(k,\mu) + i\tfrac{\pi}{\ell}k\mu\hat{f}(k,\mu) + \sigma\hat{f}(k,\mu) = \sigma(1+\gamma)\langle\hat{f}\rangle(k)$$

pour tout entier relatif k. Comme $\lambda \neq -\sigma$, on a

$$\lambda + \sigma + i\tfrac{\pi}{\ell}k\mu \neq 0$$

de sorte que

$$\hat{f}(k,\mu) = \frac{\sigma(1+\gamma)}{\lambda + \sigma + i\frac{\pi}{\ell}k\mu}\langle \hat{f}\rangle(k)\,.$$

(3) On déduit donc de la question (2) que, pour tout entier relatif k, l'on a

$$\langle \hat{f}\rangle(k) = \tfrac{1}{2}\langle \hat{f}\rangle(k)\int_{-1}^{1}\frac{\sigma(1+\gamma)d\mu}{\lambda + \sigma + i\frac{\pi}{\ell}k\mu}\,.$$

(4) Si $\langle \hat{f}\rangle(k)$ est nulle pour tout entier relatif k, alors $\hat{f}(k,\mu)$ est identiquement nulle pour tout entier relatif k est tout $\mu \in [-1,1]$ d'après le (2). Par injectivité de la transformation de Fourier, ceci implique que f est identiquement nulle. Par conséquent, si f n'est pas identiquement nulle, il existe un entier relatif k tel que

$$(Ck) \qquad 1 = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\sigma(1+\gamma)d\mu}{\lambda + \sigma + i\frac{\pi}{\ell}k\mu}\,.$$

On calcule, pour $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\sigma(1+\gamma)d\mu}{\lambda + \sigma + i\frac{\pi}{\ell}k\mu} &= \tfrac{1}{2}\sigma(1+\gamma)\int_{-1}^{1}\frac{\lambda+\sigma - i\frac{\pi}{\ell}k\mu}{(\lambda+\sigma)^2 + (\frac{\pi}{\ell}k)^2\mu^2}d\mu \\
&= \tfrac{1}{2}\sigma(1+\gamma)\int_{-1}^{1}\frac{\lambda+\sigma}{(\lambda+\sigma)^2 + (\frac{\pi}{\ell}k)^2\mu^2}d\mu \\
&= \sigma(1+\gamma)\int_{0}^{1}\frac{\lambda+\sigma}{(\lambda+\sigma)^2 + (\frac{\pi}{\ell}k)^2\mu^2}d\mu \\
&= \frac{\sigma(1+\gamma)\ell}{\pi k}\arctan\left(\frac{\pi k}{(\lambda+\sigma)\ell}\right).
\end{aligned}$$

Donc, pour $k \neq 0$, la condition (Ck) s'écrit

$$\frac{\sigma(1+\gamma)\ell}{\pi k}\arctan\left(\frac{\pi k}{(\lambda_k+\sigma)\ell}\right) = 1$$

ce qui entraîne que

$$\frac{\pi k}{\sigma(1+\gamma)\ell} \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

ou encore

$$0 < |k| < \tfrac{1}{2}\sigma(1+\gamma)\ell\,.$$

Pour $k = 0$, la condition (C0) s'écrit

$$1 = \frac{\sigma(1+\gamma)}{\lambda_0 + \sigma}$$

(5) On a donc

$$\lambda_0 = \sigma\gamma\,,$$

puis, pour tout entier relatif k vérifiant

$$0 < |k| < \tfrac{1}{2}\sigma(1+\gamma)\ell\,,$$

on a

$$\frac{\pi k}{(\lambda_k+\sigma)\ell} = \tan\left(\frac{\pi k}{\sigma(1+\gamma)\ell}\right)$$

ou encore

$$\lambda_k(\ell,\sigma,\gamma) = -\sigma + \frac{\pi k}{\ell\tan\left(\frac{\pi k}{\sigma(1+\gamma)\ell}\right)}\,,\qquad 1 = k < \tfrac{1}{2}\sigma(1+\gamma)\ell\,.$$

(6) La plus grande valeur est λ_0. En effet

$$\lambda_k(\ell,\sigma,\gamma) = -\sigma + \sigma(1+\gamma)\Phi\left(\frac{\pi k}{\sigma(1+\gamma)\ell}\right)$$

où $\Phi(z) = z/\tan z$ est de classe C^∞ sur $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. On calcule

$$\Phi'(z) = \frac{\tan z - z - z\tan^2 z}{\tan^2 z}\,,\qquad (\tan^2 z\Phi'(z))' = -2z\tan z(1+\tan^2 z) \leq 0$$

ce qui montre que $\Phi'(z) \leq 0$ for all $|z| < \frac{\pi}{2}$. Donc Φ est décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2})$, de sorte que $\Phi(0) \geq \Phi(\pi k/\sigma(1+\gamma)\ell)$ for each integer k such that $|k| < \frac{1}{2}\sigma(1+\gamma)\ell$.
(7) On a $\partial_x f(x,\mu) = \partial_x(F_\ell(x/\ell,\mu)) = (\partial_X F)(x/\ell,\mu)/\ell$. Donc f est solution de (VP) si et seulement si F est solution de

$$\lambda F_\ell(X,\mu) = \frac{1}{\ell^2}\Lambda F_\ell(X,\mu) = -\frac{1}{\ell}\mu\partial_X F_\ell(X,\mu) - \sigma F_\ell(X,\mu) + \sigma\left(1+\frac{1}{\ell^2}\Gamma\right)\langle F_\ell\rangle(X)$$

avec $F(\cdot,\mu)$ périodique en X de période 2.
(8) On a $F_\ell(X,\mu) \to P(X)$ lorsque $\ell\to\infty$, où P est solution de l'équation de diffusion

$$\Lambda P(X) = \frac{1}{3\sigma}\partial_X^2 P(X) + \sigma\Gamma P(X)\,,\quad P(X+2) = P(X)\,.$$

(9) Les valeurs propres du problème obtenu à la question (8) sont

$$\Lambda_k(\sigma,\Gamma) = -\frac{\pi^2k^2}{3\sigma} + \sigma\Gamma$$

pour tout entier k. Les fonctions propres associées sont $\cos(\pi kX)$ et $\sin(\pi kx)$ lorsque $k\neq 0$, et la fonction constante 1 lorsque $k=0$.
(10) Comme $\frac{\tan z}{z} = 1 + \frac{1}{3}z^2 + O(z^4)$, on a

$$\begin{aligned}\lambda_k(\ell,\sigma,\Gamma/\ell^2) &= -\sigma + \sigma(1+\Gamma/\ell^2)\left(1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\pi k}{\sigma(1+\Gamma/\ell^2)\ell}\right)^2 + O\left(\frac{\pi k}{\sigma(1+\Gamma/\ell^2)\ell}\right)^4\right)\\ &= \frac{\sigma\Gamma}{\ell^2} - \tfrac{1}{3}\sigma\left(\frac{\pi k}{\sigma\ell}\right)^2 + O\left(\frac{k}{\ell}\right)^4 = \frac{\Lambda_k(\sigma,\Gamma)}{\ell^2}\end{aligned}$$

pour tout entier relatif k fixé. Evidemment pour ℓ assez grand, la condition (Ck) de la question (4) est vérifiée.

(11) Il n'y a pas ici de problème de taille critique, puisque la plus grande valeur propre de A, soit ${}_0(\ell,\sigma,\gamma) = \sigma\gamma/\ell^2$ est positive ou négative suivant que γ est positif ou négatif, indépendamment de ℓ. Sur le plan physique, ceci est dû au fait que la condition aux limites périodiques conserve exactement le nombre de particules. Il n'y a donc pas de compétition entre la production de particules à l'intérieur du domaine correspondant à une période spatiale de la fonction de distribution et la perte de particules au bord de ce domaine.

2 Schéma numérique : 8 points

Soit une vitesse constante et non-nulle $a \neq 0$. On considére l'équation d'advection linéaire dans $(0,1)$ avec une condition aux limites de périodicité

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1)\times \mathbf{R}_*^+ \\ u(t,0) = u(t,1) \text{ pour } t \in \mathbf{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1), \end{array}\right. \tag{1}$$

où $u_0(x)$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0,\ j \in \{0,1,...,N\},$$

ainsi que les points "milieux"

$$(t_{n+1/2}, x_{j+1/2}) = \big((n+1/2)\Delta t, (j+1/2)\Delta x\big) \text{ pour } n \geq 0, j \in \{0,1,...,N\}.$$

On note u_j^n, $u_{j+1/2}^n$ et $u_j^{n+1/2}$, une approximation discrète au point (t_n, x_j), $(t_n, x_{j+1/2})$ et $(t_{n+1/2}, x_j)$, respectivement, de la solution exacte $u(t,x)$. On considère le schéma de Thomée, pour $0 \leq j \leq N$,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \\ 2u_{j+1/2}^n = u_{j+1}^n + u_j^n \text{ et } 2u_j^{n+1/2} = u_j^{n+1} + u_j^n. \end{array}\right. \tag{2}$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites de périodicité est prise en compte en posant $u_0^n = u_N^n$. On note U^n le vecteur de composantes u_j^n, pour $1 \leq j \leq N$. Les deux dernières équations algébriques de (2) sont appelées "relations boite".

1. En notant $c = a\Delta t/\Delta x$, le schéma (2) se réécrit

   $$u_{j+1}^{n+1} + u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_j^n + c\left(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^n\right) = 0.$$

   qui est équivalent à

   $$AU^{n+1} = BU^n, \tag{3}$$

   avec

   $$A = \begin{pmatrix} 1+c & 0 & & & 1-c \\ 1-c & 1+c & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-c & 1+c & 0 \\ 0 & & & 1-c & 1+c \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1-c & 0 & & & 1+c \\ 1+c & 1-c & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1+c & 1-c & 0 \\ 0 & & & 1+c & 1-c \end{pmatrix}$$

Pour montrer que le schéma est bien défini, on montre que la matrice A est inversible. Soit x un vecteur du noyau, tel que $Ax = 0$, autrement dit $(1+c)x_i + (1-c)x_{i-1} = 0$ pour $1 \leq i \leq N$. Par conséquent

$$x_i = \left(\frac{c-1}{c+1}\right)^i x_0,$$

mais comme $x_N = x_0$ on doit avoir $\frac{c-1}{c+1} = \pm 1$ si $x_0 \neq 0$, ce qui est impossible puisque $c \neq 0$. Donc $x = 0$ et A est inversible.

2. Si la condition aux limites de périodicité est remplacée par une condition aux limites de Dirichlet nulle en entrée (on choisit le cas $a > 0$ et une entrée en $x = 0$), la matrice A devient

$$A = \begin{pmatrix} 1+c & 0 & & & 0 \\ 1-c & 1+c & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-c & 1+c & 0 \\ 0 & & & 1-c & 1+c \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire inférieure. La résolution du sytème linéaire associé à A peut se faire alors explicitement par "remontée" (ou méthode des caractéristiques discrètes). Malgré les apparences, le schéma est donc explicite en temps.

3. On analyse la précision du schéma (2) autour du point $(t_{,n+1/2}\, x_{j+1/2})$. Les différences finies pour les dérivées en temps et en espace sont alors centrées. Un calcul facile montre donc que le schéma est consistant et précis à l'ordre 2 en espace et temps.

4. On multiplie (2) par $2(u^{n+1}_{j+1/2} + u^n_{j+1/2}) = u^{n+1}_{j+1} + u^{n+1}_j + u^n_{j+1} + u^n_j$, pour obtenir

$$(u^{n+1}_{j+1} + u^{n+1}_j)^2 - (u^n_{j+1} + u^n_j)^2 + c\left((u^{n+1}_{j+1} + u^n_{j+1})^2 - (u^{n+1}_j + u^n_j)^2\right) = 0,$$

d'où l'on déduit par sommation en j (avec la condition aux limites de périodicité)

$$\sum_{j=1}^N (u^{n+1}_{j+1} + u^{n+1}_j)^2 = \sum_{j=1}^N (u^n_{j+1} + u^n_j)^2.$$

Un calcul similaire, en multipliant (2) par $u^{n+1}_{j+1} - u^n_{j+1} - u^{n+1}_j + u^n_j$, donne

$$\sum_{j=1}^N (u^{n+1}_{j+1} - u^{n+1}_j)^2 = \sum_{j=1}^N (u^n_{j+1} - u^n_j)^2.$$

5. Par périodicité, on a

$$4\sum_{j=1}^{N}(u_j^{n+1})^2 = \sum_{j=1}^{N}(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})^2 + \sum_{j=1}^{N}(u_{j+1}^{n+1} + u_j^{n+1})^2 = 4\sum_{j=1}^{N}(u_j^0)^2$$

Le schéma est donc stable en norme L^2 sans aucune condition sur le pas de temps. Par le théorème de Lax, comme il est consistant, il est aussi convergeant pour la norme L^2.