ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème anne, MAP/MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Corrigé de l'examen écrit du 16 Mars 2011 (2 heures)

I

1) En moyennant par rapport à μ les deux membres de l'équation vérifiée par f, on trouve que

$$\partial_x\langle\mu f\rangle = -\langle(f-\langle f\rangle)\rangle = 0\,.$$

(Comme $f \in E$ (espace défini dans l'énoncé), on a $\partial_x(\mu f) = -(f-\langle f\rangle)$ bornée sur $[0,+\infty[\times[-1,1]$, de sorte que la fonction $(x,\mu)\mapsto \mu f(x,\mu)$ vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous l'intégrale en μ.)

2) Multipliant par μ chaque membre de l'équation vérifiée par f, on trouve, après moyennisation en μ:

$$\partial_x\langle\mu^2 f\rangle = -\langle\mu f\rangle + \langle\mu\langle f\rangle\rangle = -\langle\mu f\rangle\,.$$

(La fonction $(x,\mu)\mapsto\mu^2 f(x,\mu)$ vérifie comme ci-dessus les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe d'intégrale en μ.) D'après le 1), $\langle\mu f\rangle$ est une constante, de sorte que

$$\langle\mu^2 f\rangle(x) = \langle\mu^2 f\rangle(0) - x\langle\mu f\rangle\,.$$

Or, comme $f\in E$, la fonction affine $x\mapsto\langle\mu^2 f\rangle(x)$ est bornée sur $[0,+\infty[$, d'où

$$\langle\mu f\rangle = 0\,,\quad \text{et}\quad \langle\mu^2 f\rangle = \text{Const.}$$

3) Multiplions par f chaque membre de l'équation vérifiée par f: on trouve

$$\partial_x(\tfrac{1}{2}\mu f^2) = -f(f-\langle f\rangle)\,.$$

Moyennant cette expression par rapport à μ, on trouve que

$$\partial_x\langle\tfrac{1}{2}\mu f^2\rangle = -\langle f(f-\langle f\rangle)\rangle = -\langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle\,.$$

(Comme ci-dessus, la fonction $(x,\mu)\mapsto\mu f^2(x,\mu)$ vérifie les hypothèse du théorème de dérivation sous le signe d'intégrale en μ.) En intégrant chaque membre de cette égalité sur $[0,L]$, on obtient, à cause des conditions aux limites,

$$\tfrac{1}{2}\langle\mu f^2\rangle(L) + \int_0^L \langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x)dx = \tfrac{1}{2}\langle\mu f^2\rangle(0) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^0 \mu f^2(0,\mu)d\mu \le 0\,.$$

Enfin, comme $f\in E$, la fonction $L\mapsto\frac{1}{2}\langle\mu f^2\rangle(L)$ est bornée sur $[0,+\infty[$, de sorte que

$$\sup_{L>0}\int_0^L \langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x)dx < \infty\,.$$

Comme l'intégrande de l'intégrale ci-dessus est positif ou nul, on en déduit que

$$\int_0^\infty \langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x)dx < \infty\,.$$

4) Comme la fonction $x\mapsto\langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x)$ est sommable sur $[0,+\infty[$, il n'existe aucun réel $a>0$ tel que $\langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x) > a$ pour tout $x\ge 0$. Pour $a=1/2$, il existe donc $x_1>0$ tel que $\langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x_1) < 1/2$. Pour $a=1/4$, il existe donc $x_2 > x_1+1$ tel que $\langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x_2) < 1/4$. Par récurrence, il existe une suite croissante $x_n\to+\infty$ telle que $\langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x_n)\le 1/2^n\to 0$.

5) On a

$$\langle\mu(f-\langle f\rangle)^2\rangle = \langle\mu f^2\rangle - 2\langle\mu f\langle f\rangle\rangle + \langle\mu\langle f\rangle^2\rangle = \langle\mu f^2\rangle - 2\langle\mu f\rangle\langle f\rangle + \langle\mu\rangle\langle f\rangle^2 = \langle\mu f^2\rangle$$

puisque $\langle\mu\rangle = 0$ et que $\langle\mu f\rangle = 0$ (cf. 2)).
6) D'après le 3), on a $\partial_x\langle\frac{1}{2}\mu f^2\rangle = -\langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle \leq 0$, de sorte que la fonction $x \mapsto \langle\frac{1}{2}\mu f^2\rangle(x)$ est décroissante. D'après le 5),

$$|\langle\tfrac{1}{2}\mu f^2\rangle(x_n)| = |\langle\mu(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x_n)| \leq |\langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x_n)| \leq 1/2^n\,,$$

en tenant compte du 4). Comme la fonction décroissante $x \mapsto \langle\frac{1}{2}\mu f^2\rangle(x)$ vérifie $\langle\frac{1}{2}\mu f^2\rangle(x_n) \to 0$, on conclut que $\langle\frac{1}{2}\mu f^2\rangle(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. Et l'inégalité du 3)

$$0 \leq \int_0^L \langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x)dx \leq -\langle\tfrac{1}{2}\mu f^2\rangle(L) \to 0$$

lorsque $L \to +\infty$ montre que

$$\int_0^\infty \langle(f-\langle f\rangle)^2\rangle(x)dx = 0\,.$$

7) Par conséquent $\mu\partial_x f = -(f-\langle f\rangle) = 0$ p.p. sur $[0,+\infty[\times[-1,1]$. Par continuité de f et de $\partial_x f$ sur $[0,+\infty[\times([-1,0[\cup]0,1])$, on en déduit que $\mu\partial_x f = -(f-\langle f\rangle) = 0$ en tout point de $[0,+\infty[\times([-1,0[\cup]0,1])$. En particulier, $\mu\partial_x f = 0$ sur $[0,+\infty[\times]0,1]$, et comme $f(0,\mu) = 0$ pour tout $\mu \in]0,1]$, on conclut que $f = 0$ sur $[0,+\infty[\times]0,1]$.
8) D'après le 6), la fonction $x \mapsto \langle\frac{1}{2}\mu f^2\rangle(x)$ est décroissante et tend vers 0 à l'infini. Donc, d'après le 7), on a

$$\int_{-1}^0 \mu f^2(x,\mu)d\mu = \int_{-1}^1 \mu f^2(x,\mu)d\mu \geq 0$$

et comme l'intégrande continu $\mu f^2(x,\cdot)$ est négatif ou nul sur $[-1,0[$, on conclut que $f(x,\mu) = 0$ pour tout $x \geq 0$ et tout $\mu \in [-1,0[$.

II

1) Soit $u(x)$ une fonction régulière. L'erreur de troncature du schéma est

$$\begin{aligned} E &= V\frac{u(x_j)-u(x_{j-1})}{\Delta x} - \nu\frac{u(x_{j-1})-2u(x_j)+u(x_{j+1})}{(\Delta x)^2} - f(x_j) \\ &= \left(V\frac{du}{dx} - \nu\frac{d^2u}{dx^2} - f\right)(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

Si $u(x)$ est la solution du problème (D), alors on a $E = \mathcal{O}(\Delta x)$. Par ailleurs les conditions aux limites du schéma sont aussi consistantes avec celles de (D). Donc le schéma est consistant.
2) La matrice A du schéma est

$$A = \begin{pmatrix} a+2b & -b & & & 0 \\ -a-b & a+2b & -b & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a-b & a+2b & -b \\ 0 & & & -a-b & a+b \end{pmatrix} \quad \text{avec } a = \frac{V}{\Delta x} \text{ et } b = \frac{\nu}{(\Delta x)^2}.$$

La somme des coefficients sur chacune des lignes (sauf la première) est égale à 0 et la somme des coefficients de la première ligne est strictement positive. Donc A est une M-matrice. De plus, A est irréductible car $a_{i,i+1} \neq 0$ et $a_{i+1,i} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq N-1$. Enfin, le Lemme 6.2.6 nous dit que A est inversible puisque c'est une M-matrice irréductible avec la somme des coefficients d'au moins une ligne strictement positive.
3) En vertu du Lemme 6.2.7 l'inverse d'une M-matrice irréductible (et inversible) est strictement positive, ce qui démontre le principe du maximum discret.
4) Commençons par démontrer l'inégalité (dite de Poincaré) suivante: toute fonction $v(x)$ de classe C^1 sur $[0, L]$ telle que $v(0) = 0$ vérifie

$$\int_0^L |v(x)|^2 dx \leq L^2 \int_0^L \left| \frac{dv}{dx}(x) \right|^2 dx.$$

En effet, $v(x) = \int_0^x \frac{dv}{dx}(s) ds$ et par Cauchy-Schwarz on obtient

$$|v(x)|^2 \leq \left(\int_0^x ds \right) \left(\int_0^x \left| \frac{dv}{dx}(s) \right|^2 ds \right) \leq L \int_0^L \left| \frac{dv}{dx}(s) \right|^2 ds,$$

puis, en intégrant encore par rapport à x sur $(0, L)$, on en déduit le résultat.

On multiplie maintenant l'équation (D) par la solution $u(x)$ et on intègre par parties pour obtenir

$$\frac{V}{2} \left(|u(L)|^2 - |u(0)|^2 \right) + \nu \int_0^L \left| \frac{du}{dx}(x) \right|^2 dx = \int_0^L f(x)\, u(x)\, dx.$$

En tenant compte de la condition aux limites $u(0) = 0$, du fait que $V \geq 0$ et en appliquant Cauchy-Schwarz au membre de droite, on en déduit l'inégalité

$$\nu \int_0^L \left| \frac{du}{dx}(x) \right|^2 dx \leq \left(\int_0^L |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré on obtient le résultat voulu

$$\nu L^{-2} \left(\int_0^L |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^L |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

5) On multiplie le schéma au point x_j par $\Delta x u_j$ et on somme en j. Considérons tout d'abord le terme de convection

$$\sum_{j=1}^{N} (u_j - u_{j-1}) u_j = \sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 - \sum_{j=1}^{N} u_j u_{j-1}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 - \left(\sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{N} |u_{j-1}|^2 \right)^{1/2}.$$

Or $u_0 = 0$, donc $\sum_{j=1}^{N} |u_{j-1}|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} |u_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{N} |u_j|^2$ et on en déduit que ce terme de convection est positif ou nul.

Considérons maintenant le terme de diffusion pour lequel un réarrangement classique de la somme (voir le cours) donne

$$\sum_{j=1}^{N} -\nu \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x} u_j = \frac{\nu}{\Delta x} \sum_{j=1}^{N} (u_j - u_{j-1})^2.$$

Enfin, par Cauchy-Schwarz le terme source est majoré comme suit

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta x u_j f_j \leq \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta x |f_j|^2 \right)^{1/2}.$$

On a donc démontré que

$$\frac{\nu}{\Delta x} \sum_{j=1}^{N} (u_j - u_{j-1})^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{N} \Delta x |f_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Il reste à établir une inégalité de Poincaré discrète (voir le cours). Pour tout vecteur $(v_j)_{0 \leq j \leq N}$ tel que $v_0 = 0$ on a

$$v_j = \sum_{k=1}^{j} \Delta x \frac{v_k - v_{k-1}}{\Delta x}$$

et en appliquant Cauchy-Schwarz

$$|v_j|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{N} \Delta x \right) \left(\sum_{k=1}^{N} \Delta x \frac{v_k - v_{k-1}}{\Delta x} \right),$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta x |v_j|^2 \leq L^2 \sum_{k=1}^{N} \Delta x \frac{v_k - v_{k-1}}{\Delta x}.$$

En combinant cette inégalité avec la précédente, on en déduit la stabilité L^2 du schéma

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j|^2 \leq \frac{L^4}{\nu^2} \sum_{j=1}^{N} \Delta x |f_j|^2.$$

6) Par le théorème de Lax (théorème 5.1.11) un schéma linéaire, stable et consistant est convergent.