ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP-MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Corrigé de l'examen écrit du 19 Mars 2014

Les lecteurs du sujet n'auront pas manqué de reconnaitre dans cet énoncé une variation de la limite de diffusion présentée au chapitre 4 du polycopié de cours. Certaines questions sont donc très faciles pour qui connait le cours... Les numéros cités ci-dessous font référence au polycopié.

1. Partie 1

1) D'après le Théorème 4.2.2 (alternative de Fredholm), pour $S \in V$, il existe une solution $\psi \in V = L^2(\mathbf{R}^N; m(|v|)dv)$ de $(I - \mathcal{K})\psi(v) = S(v)$ si et seulement si $S \in \mathrm{Ker}(I - \mathcal{K})^\perp$ car $\mathcal{K}$ est auto-adjoint (à cause de l'hypothèse de symétrie sur le noyau $k(v, w)$), c'est-à-dire si

$$\langle S \rangle := \int_{\mathbf{R}^N} S(v)m(|v|)dv = 0$$

d'après le Lemme 4.2.1. Cette solution n'est pas unique et deux solutions diffèrent par une constante puisque $\mathrm{Ker}(I - \mathcal{K}) = \mathbf{R}$.

Si $\psi(v) \in V$ est une solution de $(I - \mathcal{K})\psi(v) = S(v)$, alors en multipliant par une fonction test et en intgrant en v on obtient la formulation variationnelle: trouver $\psi(v) \in V$ telle que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Big((I - \mathcal{K})\psi(v) - S(v)\Big)\phi(v)m(|v|)dv = 0 \text{ pour tout } \phi \in V.$$

Réciproquement, si $\psi(v) \in V$ est solution de cette formulation variationnelle, alors en faisant varier la fonction test on trouve que $(I - \mathcal{K})\psi(v) - S(v) = 0$ en tant que fonction de V.

2) Comme v vérifie par symétrie la condition $\langle v \rangle = 0$, le résultat de la première question implique qu'il existe une solution $b(v)$ de l'équation $(I - \mathcal{K})b(v) = v$ qui est unique si on lève l'indétermination de la constante additive par la condition $\langle b(v) \rangle = 0$.

Par définition, le second membre de l'équation

$$(I - \mathcal{K})d(v) = v \otimes b(v) - \langle v \otimes b(v) \rangle$$

est à moyenne nulle, donc il existe une unique solution d telle que $\langle d(v) \rangle = 0$.

3) Soit la matrice $D_{ij} = \langle v_i b_j(v) \rangle$. Pour tout vecteur $\xi \neq 0, \xi \in \mathbf{R}^N$ on définit $b_\xi(v) = \xi \cdot b(v)$ qui, par linéarité, est solution de $(I - \mathcal{K})b_\xi(v) = v \cdot \xi$. On remarque que $D\xi \cdot \xi = \langle v \cdot \xi \, b_\xi(v) \rangle$. La formulation variationnelle pour b_ξ avec la fonction test b_ξ donne

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Big((I - \mathcal{K})b_\xi(v) - v \cdot \xi\Big)b_\xi(v)m(|v|)dv = 0,$$

autrement dit

$$D\xi \cdot \xi = \int_{\mathbf{R}^N} \Big((I - \mathcal{K})b_\xi(v)\Big)b_\xi(v)m(|v|)dv.$$

D'après le Lemme 4.2.1 cette dernière quantité est toujours positive et ne s'annule que si $b_\xi(v)$ est une fonction constante. Mais si $b_\xi(v)$ est constant, alors $(I -$

$\mathcal{K})b_\xi(v) = 0$ et donc $v \cdot \xi = 0$ ce qui est impossible pour $\xi \neq 0$. Par conséquent, $D\xi \cdot \xi > 0$ et D est une matrice définie positive.

4) Soit V_I le sous-espace de V engendré par la famille libre $(\phi_i(v))_{1 \le i \le I}$. La méthode de Galerkin consiste à calculer la solution $\psi_I \in V_I$ de

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Big((I - \mathcal{K})\psi_I(v) - S(v) \Big) \phi(v) m(|v|) dv = 0 \text{ pour tout } \phi \in V_I.$$

On développe la solution sur la base des ϕ_i

$$\psi_I(v) = \sum_{j=1}^{I} X_j \phi_j(v) \quad \text{ avec } X_i \in \mathbf{R}$$

et on prend la fonction test $\phi = \phi_i$ pour obtenir

$$\sum_{j=1}^{I} A_{ij} X_j = c_i$$

avec

$$A_{ij} = \int_{\mathbf{R}^N} \Big((I - \mathcal{K})\phi_j(v) \Big) \phi_i(v) m(|v|) dv \quad \text{ et } c_i = \int_{\mathbf{R}^N} S(v)\, \phi_i(v) m(|v|) dv.$$

Par conséquent, résoudre la formulation variationnelle dans V_I est équivalent à résoudre le système linéaire $AX = c$.

Si les fonctions constantes appartiennent à V_I, cela veut dire qu'il existe un vecteur $X^0 \neq 0$ tel que $\sum_{j=1}^{I} X_j^0 \phi_j(v) = 1$. Comme $(I - \mathcal{K})1 = 0$, on en déduit que $AX^0 = 0$ donc $X^0 \in \operatorname{Ker} A$. Comme seules les fonctions constantes appartiennent à $\operatorname{Ker}(I - \mathcal{K})$, le noyau de A est de dimension 1 engendré par X^0. De même, si on a $\langle S(v) \rangle = 0$, on en déduit (par symétrie de A, héritée de celle de $\mathcal{K}$) que $c \cdot X^0 = 0$, c'est-à-dire que $c \in \operatorname{Ker} A^\perp = \operatorname{Im} A$. Autrement dit, il existe une solution du système linéaire $AX = c$ et cette solution est unique à l'addition près d'un multiple de X^0.

2. Partie 2

5) Comme dans la section 4.2.2 on trouve les équations suivantes pour les 3 premiers termes de la série formelle de Hilbert:

$$(I - \mathcal{K}) f_0 = 0,$$
$$(I - \mathcal{K}) f_1 = -v \cdot \nabla_x f_0,$$
$$(I - \mathcal{K}) f_2 = -\partial_t f_0 - v \cdot \nabla_x f_1.$$

En vertu de la première question on déduit que $f_0(t, x, v) = \langle f_0 \rangle$, autrement dit f_0 ne dépend pas de v. Ensuite, par symétrie on a $\langle v \cdot \nabla_x f_0 \rangle = 0$ et il existe donc une solution f_1. En utilisant la solution $b(v)$ de la question 2, on trouve

$$f_1(t, x, v) = \langle f_1 \rangle - b(v) \cdot \nabla_x f_0(t, x).$$

La condition de l'alternative de Fredholm pour résoudre en f_2 est

$$\langle \partial_t f_0 + v \cdot \nabla_x f_1 \rangle = 0,$$

qui devient en remplaçant f_1 par sa formule

$$\partial_t f_0(t, x) - \operatorname{div}_x (D \nabla_x f_0(t, x)) = 0$$

avec D la matrice de la question 3 qui est définie positive.

L'équation pour f_2 devient alors

$$(I-\mathcal{K})f_2 = -\operatorname{div}_x(D\nabla_x f_0) + v\otimes b(v)\cdot\nabla_x\nabla_x f_0 - v\cdot\nabla_x\langle f_1\rangle,$$

dont la solution est

$$f_2(t,x,v) = \langle f_2\rangle(t,x) + d(v)\cdot\nabla_x\nabla_x f_0 - b(v)\cdot\nabla_x\langle f_1\rangle.$$

6) Grâce à l'hypothèse $k(v,w)=k(-v,-w)$ on vérifie que, si $\check{\phi}(v)=\phi(-v)$

$$\mathcal{K}(\check{\phi})(v) = \int_{\mathbf{R}^N} k(v,w)\phi(-w)m(|w|)dw = -\int_{\mathbf{R}^N} k(-v,w)\phi(w)m(|w|)dw = -\mathcal{K}(\phi)(-v).$$

On en déduit que $b(-v)=-b(v)$ car le second membre de l'équation $(I-\mathcal{K})b=v$ est impair. De même, $d(-v)=d(v)$ car le second membre de l'équation pour d est pair. Par conséquent la fonction $v\to v_i d_{jl}(v)$ est impaire, ce qui implique $\langle v_i d_{jl}(v)\rangle = 0$. Par l'alternative de Fredholm, il existe donc une unique solution de $(I-\mathcal{K})q_{ijl}(v) = v_i d_{jl}(v)$ telle que $\langle q_{ijl}\rangle = 0$.

7) L'équation vérifiée par f_3 est

$$(I-\mathcal{K})f_3 = -\partial_t f_1 - v\cdot\nabla_x f_2.$$

La condition d'existence d'une solution f_3 est

$$\langle \partial_t f_1 + v\cdot\nabla_x f_2\rangle = 0,$$

qui devient en remplaçant f_1 et f_2 par leurs formules

$$\partial_t\langle f_1\rangle(t,x) - \operatorname{div}_x(D\nabla_x\langle f_1\rangle(t,x)) = 0$$

puisque $\langle b(v)\rangle = 0$ et $\langle vd(v)\rangle = 0$. L'équation satisfaite par $\langle f_1\rangle$ est la même que celle pour $\langle f_0\rangle$.

8) Si $\langle f_1\rangle$ vérifie l'équation de la question 7, l'équation vérifiée par f_3 devient

$$(I-\mathcal{K})f_3 = b(v)\cdot\nabla_x\partial_t f_0 - v\otimes d(v)\cdot\nabla_x\nabla_x\nabla_x f_0 + (v\otimes b(v) - D)\cdot\nabla_x\nabla_x\langle f_1\rangle - v\cdot\nabla_x\langle f_2\rangle.$$

En remplaçant $\partial_t f_0$ par $D\cdot\nabla_x\nabla_x f_0$, on obtient

$$(I-\mathcal{K})f_3 = \Big(b(v)\otimes D - v\otimes d(v)\Big)\cdot\nabla_x\nabla_x\nabla_x f_0 + (vb(v) - D)\cdot\nabla_x\nabla_x\langle f_1\rangle - v\cdot\nabla_x\langle f_2\rangle.$$

On en déduit la formule pour f_3

$$f_3(t,x,v) = \langle f_3\rangle(t,x) + d(v)\cdot\nabla_x\nabla_x\langle f_1\rangle(t,x) - q(v)\cdot\nabla_x\nabla_x\nabla_x f_0(t,x) - b(v)\cdot\nabla_x\langle f_2\rangle$$

3. Partie 3

9) Par application du Lemme 4.2.4 il existe une fonction scalaire $\beta(|v|)$ telle que $b(v)=\beta(|v|)v$. Le Corollaire 4.2.5 implique alors que la matrice D est scalaire.

10) Pour $g_\epsilon(t,x,v) := \rho(t,x) - \epsilon b(v)\cdot\nabla_x\rho(t,x)$, on calcule

$$g_\epsilon(t,x,v) - g_\epsilon(t,x,v-2v\cdot n_x n_x) = \epsilon\Big(b(v-2v\cdot n_x n_x) - b(v)\Big)\cdot\nabla_x\rho(t,x).$$

Or $|v-2v\cdot n_x n_x| = |v|$, donc $b(v-2v\cdot n_x n_x) = \beta(|v|)(v-2v\cdot n_x n_x)$. Par conséquent, pour $x\in\partial\Omega$

$$g_\epsilon(t,x,v) - g_\epsilon(t,x,v-2v\cdot n_x n_x) = -\epsilon\beta(|v|)\Big(2v\cdot n_x n_x\Big)\cdot\nabla_x\rho(t,x) = 0,$$

à cause de la condition aux limites de Neumann satisfaite par ρ sur le bord $\partial\Omega$ et le fait que le tenseur D est scalaire sous l'hypothèse de la question 9.

11) Soit h_ϵ défini par

$$h_\epsilon = f_\epsilon - \Big(g_\epsilon + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3\Big)$$

avec le choix $\langle f_2 \rangle = \langle f_3 \rangle = 0$. On vérifie que

$$\begin{aligned}
&\partial_t h_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} v \cdot \nabla_x h_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2}(I - \mathcal{K}) h_\epsilon = \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \qquad && (x,v) \in \Omega \times \mathbf{R}^N\,,\\
&h_\epsilon(t,x,v) = h_\epsilon(t,x,v - 2v \cdot n_x n_x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \qquad && (x,v) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^N\,,\\
&h_\epsilon\big|_{t=0} = \mathcal{O}(\epsilon^2)\,.
\end{aligned}$$

Si cette équation de Boltzmann linéaire vérifie un principe du maximum, on en déduit qu'il existe une constante C_T indépendante de ϵ telle que

$$\sup_{\substack{x\in\Omega,\, v\in\mathbf{R}^N \\ 0\le t\le T}} |h_\epsilon(t,x,v)| \le C_T \epsilon^2\,.$$

On peut alors ignorer les contributions de $\epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3$ (qui sont essentielles pour obtenir l'équation sur h_ϵ !) et en déduire le résultat

$$\sup_{\substack{x\in\Omega,\, v\in\mathbf{R}^N \\ 0\le t\le T}} |f_\epsilon(t,x,v) - g_\epsilon(t,x,v)| \le C_T \epsilon^2\,.$$