Exercice I. Modèles structurés en âge.

Soit une population que l'on caractérise par la fonction $(t,a) \mapsto d(t,a)$ (t est le temps, a est l'âge).

1. On néglige les phénomènes de naissance et de mortalité. Montrer que l'on a l'équation de transport

$$\frac{\partial d}{\partial t}(t,a) + \frac{\partial d}{\partial a}(t,a) = 0, \quad \forall a, t > 0.$$

Résoudre avec la méthode des caractéristiques dans le domaine $(t,a) \in \mathcal{D} = [0,\infty[\times[0,\infty[$.

2. Le coefficient de mortalité est donné par la fonction $a \mapsto \mu(a) > 0$. Montrer que d vérifie l'équation de transport-absorption

$$\frac{\partial d}{\partial t}(t,a) + \frac{\partial d}{\partial a}(t,a) = -\mu(a) d(t,a), \quad \forall a, t > 0.$$

Résoudre.

3. La natalité est caractérisée par la fonction bornée $a \mapsto \sigma(a) \in [0, \sigma_{\max}]$ avec $\sigma_{\max} > 0$. Justifier la condition au bord $a = 0$

$$d(0,t) = \int_0^\infty \sigma(a) d(a,t) da, \quad \forall t > 0.$$

4. Pour une population donnée initiale $d(a,0) = d_0(a)$ écrire le problème complet que l'on doit étudier pour prédire l'évolution de la population. Montrer graphiquement à l'aide des caractéristiques dans $\mathcal{D}$ que le problème est bien posé.

Exercice II. Évolution de la population (suite de l'exercice I).

1. Une question est de prédire la stabilité de la population. Pour cela on étudie les solutions du type

$$d(t,a) = e^{\lambda t} f(a).$$

Écrire les équations pour f.

2. Montrer que le problème se réduit à l'étude de l'équation

$$f(0) = \left(\int_0^\infty \sigma(a) e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s) ds} da \right) f(0).$$

3. Montrer que si la natalité est trop faible, ce que l'on caractérise par

$$\int_0^\infty \sigma(a) da \le 1,$$

alors $d(t,a) \to 0$ pour $t \to \infty$. En déduire que si la natalité est non nulle uniquement pour une tranche d'âge étroite $a_- \le a \le a_+ = a_- + \varepsilon$, alors la population tend vers 0 exponentiellement vite.

Exercice III. Effet de modes

Soit une population $d(t,a)$ très sensible aux effets de mode. Une partie d^v porte des habits verts et l'autre $d^r = d - d^v$ des habits rouges. On suppose que l'envie de se distinguer (le dandysme) fait que les porteurs d'habits rouges changent pour des habits verts dans le cas ou il y a trop de porteurs d'habits rouges (et inversement).

1. Justifier le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial d^v}{\partial t}(t,a) + \dfrac{\partial d^v}{\partial a}(t,a) = \sigma(a) \left(d^r(t,a) - d^v(t,a) \right), \\ \dfrac{\partial d^r}{\partial t}(t,a) + \dfrac{\partial d^r}{\partial a}(t,a) = \sigma(a) \left(d^v(t,a) - d^r(t,a) \right). \end{cases}$$

où le coefficient déchange $a \mapsto \sigma(a)$ peut varier en fonction de l'âge.

2. Calculer la solution.

Exercice IV. Marcheurs dans une rue

Soit une rue $]-\infty, +\infty[$ dans laquelle la population marche. On distingue les marcheurs à droite ($d^+(t,x)$) et les marcheurs à gauche ($d^-(t,x)$). Tous marchent à la même vitesse, que l'on prend égale à 1 en valeur absolue. On suppose que l'envie de discuter avec un groupe le plus fourni possible amène les marcheurs à changer de direction avec un taux $\sigma > 0$ uniforme.

1. En déduire le modèle

$$\begin{cases} \dfrac{\partial d^+}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial d^+}{\partial x}(t,x) = \sigma\left(d^-(t,x) - d^+(t,x)\right), \\ \dfrac{\partial d^-}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial d^-}{\partial x}(t,x) = \sigma\left(d^+(t,x) - d^-(t,x)\right), \end{cases}$$

Ecrire le système pour les variables $w = d^+ + d^-$ et $z = d^+ - d^-$ (système du télégraphe).

2. On suppose que $\sigma = \frac{\mu}{2\varepsilon}$ est grand (et donc $\varepsilon > 0$ est petit). On étudie ce qui se passe aux temps petits (d'ordre ε). Montrer que l'on obtient le système

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,x) = 0, \\ \varepsilon\dfrac{\partial z}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,x) = -\dfrac{\mu}{\varepsilon}z(t,x). \end{cases}$$

Démontrer la stabilité dans $L^2(\mathbb{R})$ de la solution de ce système, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \left(w(t,x)^2 + z(t,x)^2\right) dx \leq 0.$$

On supposera pour cela que la solution tend vers 0 suffisamment vite à l'infini.

3. On cherche à simplifier ce système. On pose $w = w_0 + \varepsilon w_1 + \cdots$ et $z = z_0 + \varepsilon z_1 + \cdots$. Montrer que w_0 satisfait l'équation de diffusion

$$\frac{\partial w_0}{\partial t}(t,x) - \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(t,x) = 0.$$

4. Comparer avec ce qui se passe pour une population de neutrons.

5. Pour les courageux, on peut chercher à justifier que la solution w est proche de w_0. Pour cela on pose

$$\widetilde{w} = w_0 \text{ et } \widetilde{z} = -\frac{\varepsilon}{\mu}\partial_x w_0.$$

Montrer que

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial \widetilde{z}}{\partial x}(t,x) = 0, \\ \varepsilon\dfrac{\partial \widetilde{z}}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial \widetilde{w}}{\partial x}(t,x) = -\dfrac{\mu}{\varepsilon}\widetilde{z}(t,x) + R(t,x), \end{cases}$$

avec

$$R(t,x) = \varepsilon\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial t}(t,x) = -\frac{\varepsilon^2}{\mu}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial x}(t,x).$$

On suppose que toutes les dérivées de w_0 sont uniformémement bornées, d'où $\|R\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C$.

6. Utiliser la stabilité dans L^2 de la solution du système du télégraphe pour en déduire que $w - w_0$ est petit dans $L^2(\mathbb{R})$.