

**Exercice I.**

1. Les caractéristiques sont les droites  $a'(t) = 1$ . Le long de ces droites

$$\frac{d}{dt}d(t, x(t)) = \partial_t d + \partial_a d = 0.$$

D'où la solution  $d(t, a) = d_0(a - t)$ .

2. Évident.

3. Moins évident. En fait on comprend mieux la situation sous la forme

$$d(0, t + \Delta t) \approx \int_0^\infty \sigma(a)d(a, t)da$$

qui exprime que les naissances à  $t + \Delta t$  sont causées par les individus du temps  $t$ . En passant à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  on obtient le résultat.

4. Le caractère bien posé vient du fait que les caractéristiques atteignent toujours un bord : soit la condition initiale pour  $t = 0$  ; soit la condition de natalité pour  $a = 0$ .

**Exercice II.**

1. On obtient

$$\begin{cases} \lambda f + f' = -\mu f, \\ f(0) = \int_0^\infty \sigma(a)f(a)da. \end{cases}$$

C'est un problème aux valeurs propres car  $a \mapsto f(a)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  sont les inconnues. La structure est indentique à celle d'un calcul de criticité pour un réacteur nucléaire.

2. L'intégration de la première équation  $f' = -(\lambda + \mu(a))f$  donne

$$f(a) = e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da f(0).$$

D'où l'équation demandée.

3. Les solutions non triviales (c'est à dire  $f(0) > 0$  et  $f > 0$ ) de l'équation sont possibles ssi

$$1 = \int_0^\infty \sigma(a)e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da.$$

Cela donne une condition sur  $\lambda$ . Posons

$$h(a) = \int_0^\infty \sigma(a)e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da$$

de sorte que

$$h'(a) = - \int_0^\infty \sigma(a) (\lambda + \mu(a)) e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da.$$

Cela donne le sens de variation à l'infini de  $h$  dès que  $\mu$  est une fonction bornée. Supposons que cela soit le cas. Alors

$$h(-\infty) = +\infty \text{ et } h(+\infty) = 0.$$

On a toujours

$$h'(a) \leq 0 \text{ pour } \lambda \geq 0.$$

Donc il y a toujours au moins une solution.

Si  $\lambda > 0$  alors la population  $d$  croît exponentiellement. Si  $\lambda < 0$  alors la population  $d$  décroît exponentiellement. Si  $\lambda = 0$  elle est constante au cours du temps.

Mettons nous dans le cas où la natalité est trop faible. A priori  $\sigma \leq C$  est une fonction bornée. Donc l'équation se simplifie en

$$1 = \int_{a-}^{a-+\varepsilon} \sigma(a)e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} da \leq C \int_{a-}^{a-+\varepsilon} e^{-\lambda a} da.$$

Cherchons d'éventuelles solutions  $\lambda \geq 0$ . Alors

$$1 \leq C\varepsilon$$

ce qui est impossible dès que  $\varepsilon$  est trop petit.

Plus généralement supposons que  $\int_0^\infty \sigma(a)da \leq 1$ . Alors pour  $\lambda \geq 0$  on a  $e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s)ds} \leq 1$  et

$$1 < \int_0^\infty \sigma(a)da \leq 1$$

qui est impossible.

### Exercice III.

1. La partie *équation aux dérivées partielles* se justifie comme dans l'exercice 1. Il reste à comprendre la partie *termes sources*. Le signe du terme ( $d^r - d^v$ ) est positif dès qu'il y a plus d'habits rouges que d'habits verts, ce qui correspond bien à un terme source de type dandysme. Le coefficient  $\sigma$  est positif et doit se déterminer à partir de *mesures*. C'est une constante phénoménologique (un coefficient du matériau pour un problème physique).

2. Effectuons le changement de variables

$$w = d^v + d^r \text{ et } z = d^v - d^r.$$

Alors

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_a w = 0, \\ \partial_t z + \partial_a z = -2\sigma z. \end{cases}$$

La solution est

$$w(t, a) = w_0(a - t) \text{ et } z(t, a) = e^{-2\sigma t} z_0(a - t).$$

D'où la solution

$$d^v = \frac{1}{2}(w(t, a) + z(t, a)) \text{ et } d^r = \frac{1}{2}(w(t, a) - z(t, a))$$

que l'on récrit en fonction des données initiales  $d_0^v(a)$  et  $d_0^r(a)$ .

### Exercice IV.

1. La modélisation est très proche du cas précédent. La seule différence est qu'il y a changement de direction pour l'équation du transport. Le modèle prend la forme d'un système *croisé* avec terme source sur la deuxième équation

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_a z = 0, \\ \partial_t z + \partial_a w = -2\sigma z. \end{cases}$$

2. Évident.

3. Évident. L'intérêt de ce calcul est qu'il met en relation les liens étroits entre équation de transport et équation de diffusion. Ces liens sont encore plus évidents pour des systèmes physiques.