ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP/MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Examen écrit du 18 Mars 2019 (2 heures)

1 Equation de Boltzmann linéaire : 12 points

Soient $\ell, \sigma > 0$ et $\gamma > -1$. On considère l'opérateur de Boltzmann linéaire

$$Af(x,\mu) := -\mu\partial_x f(x,\mu) - \sigma f(x,\mu) + \sigma(1+\gamma)\langle f\rangle(x)$$

où

$$\langle \phi \rangle := \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \phi(\mu)d\mu\,.$$

On étudie le problème aux valeurs propres

$$(VP) \qquad\qquad Af(x,\mu) = \lambda f(x,\mu)$$

dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ des fonctions mesurables $f \equiv f(x,\mu)$ sur $\mathbf{R}\times[-1,1]$ vérifiant

$$f(x+2\ell,\mu) = f(x,\mu) \text{ p.p. en } x,\mu\,, \quad \text{ et } \int_{-\ell}^{\ell}\int_{-1}^{1} |f(x,\mu)|^2 d\mu dx < \infty\,.$$

Pour tout $f \in \mathfrak{H}$, on notera

$$\hat{f}(k,\mu) := \int_{-\ell}^{\ell} e^{-i\pi ky/\ell} f(y,\mu)dy\,.$$

On rappelle que toute fonction de $\mathfrak{H}$ s'écrit

$$f(x,\mu) = \frac{1}{2\ell}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(k,\mu)e^{i\pi kx/\ell}\,,$$

la série étant convergente dans $\mathfrak{H}$.

(1) On suppose que $\lambda = -\sigma$. Existe-t-il $f \in \mathfrak{H}\cap C(\mathbf{R}\times[-1,1])$ solution de (VP), non identiquement nulle, et telle que $\partial_x f \in C(\mathbf{R}\times[-1,1])$?

On suppose désormais que $\lambda \neq -\sigma$.

(2) Soit $f \in \mathfrak{H}\cap C(\mathbf{R}\times[-1,1])$ telle que $\partial_x f \in C(\mathbf{R}\times[-1,1])$, solution de (VP). En supposant que λ est réel, calculer $\hat{f}(k,\mu)$ en fonction de $\langle \hat{f}(k,\cdot)\rangle$ pour tout entier relatif k.

(3) Déduire du (2) une équation vérifiée par $\langle \hat{f}(k,\cdot)\rangle$ pour tout entier relatif k.

(4) A quelle condition sur l'entier relatif k existe-t-il un réel $\lambda_k(\ell,\sigma,\gamma)$ tel que le problème (VP) admette une solution non identiquement nulle p.p. en x,μ ? (On remarquera que, pour a,b réels tels que $a > 0$, l'on a

$$\frac{1}{a+ib\mu} = \frac{a-ib\mu}{a^2+b^2\mu^2}\,,$$

et que la partie imaginaire de cette expression est une fonction impaire de μ.)

(5) Donner la suite des valeurs propres réelles $\lambda_k(\ell, \sigma, \gamma)$ du problème (VP).
(6) Préciser la plus grande valeur propre réelle du problème (VP).

On s'intéresse au cas où la période $\ell \gg 1$ et où $\gamma = \Gamma/\ell^2$.
(7) On pose $X = x/\ell$ et $F(X, \mu) = f(x, \mu)$. On suppose que f est solution du problème (VP) avec $\lambda = \Lambda/\ell^2$. Ecrire l'équation vérifiée par F_ℓ.
(8) Rappelez (en utilisant les résultats du cours) l'équation de diffusion vérifié par F_ℓ que l'on obtient à la limite lorsque ℓ tends vers l'infini.
(9) Quelles sont les valeurs propres du problème de diffusion de la question (8) ?
(10) Quel est le comportement asymptotique de $\lambda_k(\ell, \sigma, \Gamma/\ell^2)$ quand $\ell \to +\infty$?
(11) Y a-t-il une notion de taille critique, c'est-à-dire de valeur critique de la période 2ℓ pour ce problème ? Donnez une interprétation physique à votre réponse.

2 Schéma numérique : 8 points

Soit une vitesse constante et non-nulle $a \neq 0$. On considére l'équation d'advection linéaire dans $(0, 1)$ avec une condition aux limites de périodicité

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbf{R}_*^+ \\ u(t, 0) = u(t, 1) \text{ pour } t \in \mathbf{R}_*^+ \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0, 1), \end{cases} \tag{1}$$

où $u_0(x)$ est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0,\ j \in \{0, 1, ..., N\},$$

ainsi que les points "milieux"

$$(t_{n+1/2}, x_{j+1/2}) = \big(n + 1/2)\Delta t, (j + 1/2)\Delta x\big) \text{ pour } n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N\}.$$

On note u_j^n, $u_{j+1/2}^n$ et $u_j^{n+1/2}$, une approximation discrète au point (t_n, x_j), $(t_n, x_{j+1/2})$ et $(t_{n+1/2}, x_j)$, respectivement, de la solution exacte $u(t, x)$. On considère le schéma de Thomée, pour $0 \leq j \leq N$,

$$\begin{cases} \dfrac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \\ 2u_{j+1/2}^n = u_{j+1}^n + u_j^n \text{ et } 2u_j^{n+1/2} = u_j^{n+1} + u_j^n. \end{cases} \tag{2}$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites de périodicité est prise en compte en posant $u_0^n = u_N^n$. On note U^n le vecteur de composantes u_j^n, pour $1 \leq j \leq N$. Les deux dernières équations algébriques de (2) sont appelées "relations boite".

1. Montrer que le schéma (2) peut s'écrire
$$AU^{n+1} = BU^n, \tag{3}$$
avec deux matrices A et B que l'on précisera. Montrer que la matrice A est inversible, donc que le schéma est bien défini.

2. Dans le cas où la condition aux limites de périodicité est remplacée par une condition aux limites de Dirichlet nulle en entrée (en $x = 0$ si $a > 0$, en $x = 1$ si $a < 0$), le schéma est il implicite ou explicite en temps ?
3. Montrer que le schéma (2) est consistant et précis à l'ordre 2 en espace et temps. Indication : on choisira soigneusement le point (t, x) autour duquel on fera un développement de Taylor.
4. En multipliant (2) par $u^{n+1}_{j+1/2} + u^n_{j+1/2}$, montrer que

$$\sum_{j=1}^{N}(u^{n+1}_{j+1} + u^{n+1}_j)^2 = \sum_{j=1}^{N}(u^n_{j+1} + u^n_j)^2.$$

   En multipliant (2) par $u^{n+1}_{j+1} - u^n_{j+1} - u^{n+1}_j + u^n_j$, montrer que

$$\sum_{j=1}^{N}(u^{n+1}_{j+1} - u^{n+1}_j)^2 = \sum_{j=1}^{N}(u^n_{j+1} - u^n_j)^2.$$

5. Déduire de la question précédente que le schéma (2) est inconditionnellement stable en norme L^2. Que peut-on dire de la convergence de ce schéma ?