Ecole polytechnique, 3ème année, MAP-MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Examen écrit du 19 Mars 2014 (2 heures)

Soit Ω ouvert convexe borné de $\mathbf{R}^N$ de classe C^∞, et soit $m \in C_c(\mathbf{R}_+)$ telle que $m \geq 0$ et $v \mapsto m(|v|)$ soit une densité de probabilité sur $\mathbf{R}^N$ (i.e. $\int_{\mathbf{R}^N} m(|v|)dv = 1$). Soit $k \in C_b(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ tel que

$$0 < k(v,w) = k(w,v)\,, \quad \text{pour tous } v, w \in \mathbf{R}^N\,,$$
$$\int_{\mathbf{R}^N} k(v,w)m(|w|)dw = 1\,, \quad \text{pour tout } v \in \mathbf{R}^N\,.$$

On note n_x le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω. On définit $V := L^2(\mathbf{R}^N; m(|v|)dv)$ et $\mathcal{K}$ l'opérateur intégral défini sur V par

$$\mathcal{K}\phi(v) := \int_{\mathbf{R}^N} k(v,w)\phi(w)m(|w|)dw\,.$$

On notera également

$$\langle \phi \rangle := \int_{\mathbf{R}^N} \phi(v)m(|v|)dv\,.$$

On rappelle que, pour toute matrice D définie positive et tout $\rho^{in} \in C_c^\infty(\Omega)$, le problème de diffusion

$$\partial_t \rho = \operatorname{div}_x(D\nabla_x \rho)\,, \quad x \in \Omega\,, \quad n_x \cdot D\nabla_x \rho\big|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad \rho\big|_{t=0} = \rho^{in}$$

admet une unique solution $\rho \in C^\infty(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega})$. Pour un paramètre $\epsilon > 0$ (destiné à tendre vers 0) on considère l'équation de Boltzmann linéaire avec condition aux limites de réflexion spéculaire

$$\begin{aligned}
&\partial_t f_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} v \cdot \nabla_x f_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2}(I - \mathcal{K})f_\epsilon = 0\,, && (x,v) \in \Omega \times \mathbf{R}^N\,,\\
&f_\epsilon(t,x,v) = f_\epsilon(t,x,v - 2v\cdot n_x n_x)\,, && (x,v) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^N\,,\\
&f_\epsilon\big|_{t=0} = f_\epsilon^{in}\,.
\end{aligned}$$

Pour répondre aux questions posées on peut faire référence à des résultats du cours à condition d'en donner la référence précise dans le polycopié.

1. Partie 1

1. Soit $S(v) \in V$. A quelle condition sur S existe-t-il une solution $\psi(v) \in V$ de l'équation intégrale $(I - \mathcal{K})\psi(v) = S(v)$? Cette solution est-elle unique ? Montrer que l'équation est équivalente à la formulation variationnelle : trouver $\psi(v) \in V$ telle que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Big((I - \mathcal{K})\psi(v) - S(v) \Big) \phi(v) m(|v|)dv = 0 \text{ pour tout } \phi \in V.$$

2. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs $v \mapsto b(v)$ appartenant à V tel que $(I - \mathcal{K})b(v) = v$ et $\langle b \rangle = 0$. Montrer de même qu'il existe un unique champ de tenseurs $v \mapsto d(v)$ tel que $(I - \mathcal{K})d(v) = v \otimes b(v) - \langle v \otimes b(v) \rangle$ et $\langle d \rangle = 0$.

3. Soit une matrice D définie par ses coefficients $D_{ij} = \langle v_i b_j(v) \rangle$. Montrer que D est définie positive (indication : on utilisera la formulation variationnelle).

4. On étudie une méthode de Galerkin pour la résolution numérique de l'équation $(I - \mathcal{K})\psi(v) = S(v)$ (lorsque S est tel qu'il existe une solution ψ). On introduit

une famille libre $(\phi_i(v))_{1\leq i\leq I}$ de V et on note V_I le sous-espace de V engendré par cette famille. La méthode de Galerkin consiste à calculer la solution $\psi_I \in V_I$ de

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Big((I-\mathcal{K})\psi_I(v) - S(v)\Big)\phi(v)m(|v|)dv = 0 \text{ pour tout } \phi \in V_I.$$

Montrer que la méthode de Galerkin consiste à résoudre un système linéaire dont on précisera la matrice A et le second membre c. On suppose que les fonctions constantes appartiennent à V_I. Que peut-on dire du noyau de A ? Le système linéaire admet-il une solution ? Est-elle unique ?

2. Partie 2

Dans cette partie on ne se préoccupe pas des conditions aux limites sur $\partial\Omega$.

5. On introduit la série formelle de Hilbert pour la solution de l'équation de Boltzmann linéaire ci-dessus

$$f_\epsilon(t,x,v) = \sum_{n\geq 0} \epsilon^n f_i(t,x,v).$$

Donner les équations vérifiées par les 3 premiers termes f_0, f_1 et f_2. Montrer que $f_0 = \langle f_0\rangle$. Donner la forme générale de f_1 et f_2 en fonction de $b(v)$, $d(v)$, $\langle f_1\rangle$, $\langle f_2\rangle$ et montrer que, pour résoudre en f_2, le terme f_0 doit vérifier une équation de diffusion. Que peut-on dire du tenseur de diffusion de l'équation pour f_0 ?

6. On suppose désormais que $k(v,w) = k(-v,-w)$. Calculer $b(v) + b(-v)$, puis $d(v) - d(-v)$. En déduire la valeur de $\langle v_i d_{jl}(v)\rangle$ pour tous $i,j,l = 1,\ldots,N$. Montrer qu'il existe $q_{ijl} \in V$ solution de $(I-\mathcal{K})q_{ijl}(v) = v_i d_{jl}(v) - b_i(v)D_{jl}$ telle que $\langle q_{ijl}\rangle = 0$.

7. A quelle condition sur f_0, f_1, f_2 peut-on construire le terme f_3 de la série de Hilbert ? Montrer que cette condition ne fait intervenir que $\langle f_1\rangle$. Quelle est l'équation satisfaite par $\langle f_1\rangle$?

8. Préciser la forme générale du terme f_3 en fonction de $b(v), d(v)$ et $q(v)$ (indication : on utilisera l'équation vérifiée par f_0).

3. Partie 3

Soit $\rho^{in} \in C_c^\infty(\Omega)$, et soit ρ la solution du problème de diffusion ci-dessus. Soit d'autre part f_ϵ la solution de l'équation de Boltzmann linéaire ci-dessus avec

$$f_\epsilon^{in}(x,v) := \rho^{in}(x) - \epsilon b(v)\cdot\nabla_x\rho^{in}(x)\,.$$

9. On suppose dorénavant que $k(Rv,Rw) = k(v,w)$ pour tous $v,w \in \mathbf{R}^N$ et toute rotation $R \in O_N(\mathbf{R})$. En déduire qu'il existe une fonction scalaire $\beta(|v|)$ telle que $b(v) = \beta(|v|)v$ et que la matrice D est scalaire.

10. Soit $g_\epsilon(t,x,v) := \rho(t,x) - \epsilon b(v)\cdot\nabla_x\rho(t,x)$. Montrer que, pour tout $(x,v) \in \partial\Omega\times\mathbf{R}^N$ et tout $t \geq 0$, on a $g_\epsilon(t,x,v) - g_\epsilon(t,x,v-2v\cdot n_x n_x) = 0$.

11. En admettant que l'équation de Boltzmann linéaire pour f_ϵ vérifie le principe du maximum, déduire de ce qui précède que

$$\sup_{\substack{x\in\Omega, v\in\mathbf{R}^N\\ 0\leq t\leq T}} |f_\epsilon(t,x,v) - g_\epsilon(t,x,v)| \leq C_T\epsilon^2\,.$$

Indication : on pourra ajouter tout d'abord à g_ϵ les termes $\epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3$ avec le choix $\langle f_2\rangle = \langle f_3\rangle = 0$.