MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire et F. Coquel
Examen écrit du 18 Janvier 2007 (3 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice I (5 points)

On considère un "double" problème de Riemann pour l'équation de Burgers

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, \\ u(t=0,x) = u_0(x), \end{array} \right. \tag{1}$$

avec

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} u_1 & \text{si } x < 0, \\ u_2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ u_3 & \text{si } 1 < x. \end{array} \right.$$

1. Comment peut-on calculer la solution de (1) pour des temps suffisamment petits ? (On ne demande pas de calculer cette solution.) Que peut-il se passer pour des temps plus grands ? (Une réponse qualitative suffit.)
2. On suppose $u_1 \geq u_2 \geq u_3$. Calculer explicitement la solution de (1).
3. On suppose désormais $u_1 \leq u_2 \leq u_3$. Calculer explicitement la solution de (1). Commenter la différence avec le cas précédent.

Problème II (15 points)

On considère le système 2×2 suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u + \partial_x \Big(\phi(u,v)u\Big) = 0, & x \in I\!R,\ t > 0, \\ \partial_t v + \partial_x \Big(\phi(u,v)v\Big) = 0, & \end{array} \right. \tag{2}$$

où l'inconnue $\mathbf{w} = (u,v)$ appartient à l'espace des états défini par :

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{w} = (u,v) \in I\!R^2;\ u > 0, v > 0\}. \tag{3}$$

Ici, $\phi : \mathbf{w} = (u,v) \in \mathcal{Q} \to \phi(\mathbf{w}) \equiv \phi(u,v) \in I\!R$ désigne une fonction régulière astreinte aux deux hypothèses suivantes :

(i) $\mathbf{w} \to \phi(\mathbf{w})$ est strictement croissante sur $\mathcal{Q}$:

$$\partial_u \phi(\mathbf{w}) > 0, \quad \partial_v \phi(\mathbf{w}) > 0, \qquad \text{pour tout } \mathbf{w} \in \mathcal{Q}, \tag{4}$$

(ii) $\mathbf{w} \to \phi(\mathbf{w})$ est strictement convexe sur $\mathcal{Q}$:

$$u^2\ \partial^2_{uu}\phi(\mathbf{w}) + v^2\ \partial^2_{vv}\phi(\mathbf{w}) + 2uv\ \partial^2_{uv}\phi(\mathbf{w}) > 0, \quad \text{pour tout } \mathbf{w} \in \mathcal{Q}. \tag{5}$$

1. Vérifier que le système (2) est strictement hyperbolique sur $\mathcal{Q}$. Afin de fixer les notations, on ordonnera naturellement les deux valeurs propres $\lambda_-(\mathbf{w})$ et $\lambda_+(\mathbf{w})$ selon $\lambda_-(\mathbf{w}) < \lambda_+(\mathbf{w})$ pour $\mathbf{w} \in \mathcal{Q}$ en ayant pris le soin (à toute fin utile) de valider l'identité :

$$\lambda_+(\mathbf{w}) - \lambda_-(\mathbf{w}) = u\partial_u\phi(\mathbf{w}) + v\partial_v\phi(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in \mathcal{Q}. \tag{6}$$

   Proposer une base associée de vecteurs propres à droite $\big\{\mathbf{r}_-(\mathbf{w}), \mathbf{r}_+(\mathbf{w})\big\}$.

2. Quel est le type des champs de (2), linéairement dégénéré ou vraiment non linéaire ?

3. On désigne par $I_- : \mathcal{Q} \to I\!\!R$ (respectivement par $I_+ : \mathcal{Q} \to I\!\!R$) l'invariant de Riemann associé au premier champ (resp. au second champ).
   3.1 Après avoir déterminé l'invariant $I_-(\mathbf{w})$, dire pourquoi la première courbe d'onde $\mathcal{W}_-(\mathbf{w}_0)$ issue d'un état donné $\mathbf{w}_0 \in \mathcal{Q}$ vérifie nécessairement :
$$\mathcal{W}_-(\mathbf{w}_0) = \{\mathbf{w} \in \mathcal{Q};\ I_-(\mathbf{w}) = I_-(\mathbf{w}_0)\}. \tag{7}$$
   3.2 Caractériser l'invariant de Riemann $I_+(\mathbf{w})$ associé au second champ. Que peut-on dire de cet invariant de Riemann le long de la courbe de détente du deuxième champ ?
   3.3 Montrer que (de manière inattendue) cet invariant $I_+(\mathbf{w})$ reste constant le long de la courbe de choc associée au deuxième champ (dans sa partie entropique et non entropique). En déduire alors une formule analogue à (7) permettant de caractériser la seconde courbe d'onde $\mathcal{W}_+(\mathbf{w}_0)$ pour un état $\mathbf{w}_0$ choisi dans $\mathcal{Q}$.

4. Pour cette question seulement, on suppose que $\phi(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$. Dans ce cas, trouver une entropie mathématique de (2).

5. On s'attache désormais à comprendre les propriétés de la solution autosemblable $\mathbf{w}(x/t, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ du problème de Riemann associé à (2) pour la donnée initiale :
$$\mathbf{w}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & x < 0, \\ \mathbf{w}_R, & x > 0, \end{cases} \tag{8}$$
   où $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R$ désignent deux états dans $\mathcal{Q}$.
   5.1 Calculer les invariants I_- et I_+ de(s) état(s) intermédiaire(s) composant la solution $\mathbf{w}(x/t, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$ du problème (2)-(8) en fonction de ceux de la donnée initiale $\mathbf{w}_0(x)$. Pourquoi est-il inutile dans le cas présent de distinguer la nature des ondes simples (choc, contact ou détente) composant la solution du problème de Riemann considéré ? En déduire alors le principe du maximum suivant :

$$\begin{aligned} \min(I_-(\mathbf{w}_L), I_-(\mathbf{w}_R)) \le I_-(\mathbf{w}(\xi, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) \le \max(I_-(\mathbf{w}_L), I_-(\mathbf{w}_R)) \\ \min(I_+(\mathbf{w}_L), I_+(\mathbf{w}_R)) \le I_+(\mathbf{w}(\xi, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R) \le \max(I_+(\mathbf{w}_L), I_+(\mathbf{w}_R)), \end{aligned} \tag{9}$$

   pour tout $\xi = x/t \in I\!\!R$.

5.2 Pourquoi $I_+(\mathbf{w}(\xi, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R))$ ne peut-il varier que de manière monotone à la traversée de la première onde composant la solution autosemblable ? Etablir alors l'estimation *a priori* :

$$TV(I_+(\mathbf{w}(., \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R))) = |I_+(\mathbf{w}_R) - I_+(\mathbf{w}_L)|, \tag{10}$$

où avec les notations du cours $TV(I_+)$ désigne la Variation Totale sur $\mathbb{R}_\xi$ de la fonction autosemblable $I_+ \circ \mathbf{w}(\xi, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R)$.

5.3 On admettra (ce qui est vrai en règle générale) que symétriquement mais pour des raisons distinctes, $I_-(\mathbf{w}(\xi, \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R))$ reste également monotone à la traversée de la seconde onde. En déduire alors :

$$TV(I_-(\mathbf{w}(., \mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R))) = |I_-(\mathbf{w}_R) - I_-(\mathbf{w}_L)|. \tag{11}$$