MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire et F. Coquel
Examen écrit du 17 Janvier 2008 (3 heures)

L'examen traite de la dynamique des gaz isentropique en coordonnées Lagrangiennes en présence de la gravité. Les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u & = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) & = -g, \end{cases} \tag{1}$$

où le réel $g > 0$ désigne la constante de gravité. La loi de pression est supposée vérifier les hypothèses du cours :

$$p'(\tau) < 0, \quad p''(\tau) > 0, \quad \text{pour tout } \tau > 0, \tag{2}$$

avec

$$\lim_{\tau \to 0^+} p(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \to +\infty} p(\tau) = 0.$$

La principale motivation est l'étude de méthodes de volumes finis compatibles avec les solutions stationnaires du système (1). Afin de définir cette notion de compatibilité, on précise que de telles solutions, encore dites "solutions équilibres", ne dépendent pas de la variable de temps t et sont donc clairement de la forme :

$$p(\tau(x)) + g\,x \;=\; \pi_0, \quad u(x) \;=\; u_0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

pour deux constantes réelles π_0 et u_0. En supposant que les équations (3) admettent une solution équilibre $(\tau^e(x),\ u^e(x))$ pour un couple (π_0, u_0) donné, une approximation constante par maille $(\tau^e_{\Delta x}(x),\ u^e_{\Delta x}(x))$, associée à un pas d'espace $\Delta x > 0$ constant, est définie (pour simplifier) selon :

$$\begin{cases} \tau^e_{\Delta x}(x) = \tau^e_i \equiv \tau^e(i\Delta x) \\ u^e_{\Delta x}(x) = u^e_i \equiv u^e(i\Delta x) \end{cases} \qquad x \in](i-1/2)\Delta x\,,\,(i+1/2)\Delta x[\,. \tag{4}$$

Cette approximation vérifie donc par construction

$$p(\tau^e_i) + g\,i\Delta x \;=\; \pi_0, \quad u^e_i \;=\; u_0, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Une méthode de volumes finis consistante avec le système (1) est alors dite "compatible avec les solutions équilibres (3)" si toute donnée initiale discrète du type $(\tau^e_{\Delta x}, u^e_{\Delta x})$, fonctions constantes par maille vérifiant (4)–(5), conduit à une solution discrète constante par maille $(\tau_{\Delta x}(x,t^n), u_{\Delta x}(x,t^n))$ stationnaire, *i.e.* indépendante du temps :

$$\begin{cases} \tau_{\Delta x}(x,t^n) = \tau_{\Delta x}(x,t^0) = \tau^e_{\Delta x}(x) \\ u_{\Delta x}(x,t^n) = u_{\Delta x}(x,t^0) = u^e_{\Delta x}(x) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},\ t^n = n\Delta t \text{ avec } n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Une méthode de volumes finis vérifiant (6) est également dite "méthode équilibre".

La Question préliminaire, l'Exercice et le Problème peuvent être résolus indépendamment. La correction accordera de l'importance au soin apporté à la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif.

Question préliminaire (1 point)

Soit une fonction constante par morceaux $\tau^e_{\Delta x}(x)$ vérifiant (5). Vérifier que

$$p(\tau^e_i) = \frac{p(\tau^e_{i+1}) + p(\tau^e_{i-1})}{2}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

et montrer que les propriétés (2) de la loi de pression impliquent dès que $g \neq 0$:

$$\tau^e_i \neq \frac{\tau^e_{i+1} + \tau^e_{i-1}}{2}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

1 Exercice (5 points)

Afin de condenser les notations, on réécrit le système (1) sous la forme

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{s}(\mathbf{v}), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{7}$$

en lui associant l'espace des états $\Omega_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{v} = (\tau, u) \in \mathbb{R}^2,\ \tau > 0,\ u \in \mathbb{R}\}$. On propose d'approcher les solutions du système (7) en adoptant une stratégie de décomposition d'opérateurs (splitting en anglais) composée de deux pas : le premier pas est dévolu à la discrétisation du système hyperbolique homogène :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{v}) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{8}$$

le second pas prend alors en compte le terme source de gravité :

$$\partial_t \mathbf{v} = \mathbf{s}(\mathbf{v}), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{9}$$

Les solutions du système homogène (8) sont approchées par une méthode de volumes finis basée sur une linéarisation de Roe que l'on va construire.

1. Montrer que le système homogène (8) est hyperbolique et que ses deux champs caractéristiques sont VNL (vraiment non linéaires).
2. Dire en quoi il est naturel de rechercher une linéarisée de Roe sous la forme :

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\theta(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

   pour une certaine fonction θ strictement positive. Déterminer $\theta : \Omega_{\mathbf{v}} \times \Omega_{\mathbf{v}} \to \mathbb{R}^\star_+$ en arguant directement de la propriété de Roe de consistance en moyenne et montrer que l'on définit bien ainsi une linéarisée de Roe vérifiant les 3 conditions requises.
3. Calculer la première composante de la fonction flux numérique de Roe associée à la linéarisée construite en (10) en détaillant la décomposition caractéristique du saut $\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L$ sur la base des vecteurs propres à droite :

$$\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)\mathbf{r}_j(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R). \tag{11}$$

Pour simplifier les notations et puisque θ est strictement positive, on introduira $c(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \sqrt{\theta(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)}$.

4. On considère une donnée initiale discrète "équilibre" de la forme (4)–(5). Evaluer à l'issue du premier pas et dans chaque cellule $](i-1/2)\Delta x, (i+1/2)\Delta x[$, la première composante $\tau_{\Delta x}(x, \Delta t)$ de la solution discrète $\mathbf{v}_{\Delta x}(x, \Delta t)$. En utilisant la question préliminaire, montrer que l'on a nécessairement
$$\tau_{\Delta x}(x, \Delta t) \neq \tau_{\Delta x}(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$
5. Proposer une approximation consistante du second pas (9). En déduire que la stratégie de décomposition d'opérateurs proposée ne peut en aucun cas fournir un schéma équilibre au sens de la définition (6). (On admettra que ce résultat négatif persiste en général pour toute autre méthode de volumes finis par décomposition d'opérateurs.)

2 Problème

On se propose de construire des méthodes de volumes finis équilibres pour (1). Pour cela on introduit un système homogène auxiliaire :
$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u & = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi(\tau, X) & = 0, \\ \partial_t X & = 0, \end{cases} \tag{13}$$
avec la relation de fermeture :
$$\pi(\tau, X) = p(\tau) + gX.$$
Ce nouveau système est écrit sous la forme condensée
$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{w}) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{14}$$
pour une inconnue $\mathbf{w}$ naturellement recherchée dans l'espace des états :
$$\Omega_{\mathbf{w}} = \{\mathbf{w} = (\tau, u, X) \in \mathbb{R}^3,\ \tau > 0,\ u \in \mathbb{R},\ X \in \mathbb{R}\}.$$
Le Problème est composée de trois parties auxquelles il est possible de répondre de manière séquentielle quitte à admettre les résultats d'une partie précédente.

2.1 Partie I (2 points)

Le but est d'établir un lien entre le problème de Cauchy pour le système auxiliaire (13) et le problème de Cauchy associé aux équations (1).

I.1 Trouver une donnée initiale $X_0(x)$ pour la composante $X(t,x)$ telle que les solutions régulières $\mathbf{w}(t,x)$ de (13) sont équivalentes aux solutions régulières $\mathbf{v}(t,x)$ de (1).

I.2 On souhaite étendre le précédent résultat en établissant qu'une solution faible de (13) fournit une solution faible de (1) pour la donnée initiale $X_0(x)$ trouvée à la question précédente. On définit une formulation faible des équations (1) (respectivement (13)) en les écrivant au sens des distributions pour des fonctions $\mathbf{v}(t,x)$ (resp. $\mathbf{w}(t,x)$) dont les composantes appartiennent à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x)$. Proposer une formulation faible du problème de Cauchy pour (1) ainsi qu'une autre formulation faible du problème de Cauchy pour (13). Montrer qu'elles sont équivalentes pour le choix précédent de $X_0(x)$.

2.2 Partie II (7 points)

Le but est de résoudre le problème de Riemann pour le système auxiliaire (13).

II.1 Montrer que le système auxiliaire (13) est hyperbolique sur l'espace des états $\Omega_{\mathbf{w}}$. Pour cela on impose de travailler avec l'inconnue non-conservative $\mathbf{u} = (p, u, X)$ plutôt qu'avec $\mathbf{w}$. Donner la nature des trois champs caractéristiques.

II.2 Donner les invariants de Riemann pour le 2ème champ et caractériser la 2-courbe d'onde.

II.3 Quelle est la solution du problème de Riemann pour (13), associée à la donnée initiale :

$$\mathbf{w}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, \ x < 0, \\ \mathbf{w}_R, \ x > 0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p(\tau_L) + gX_L = p(\tau_R) + gX_R, \\ u_L = u_R, \end{cases} \quad X_L, X_R \text{ arbitraires.}$$

Que signifie ce résultat dans le contexte de la Partie I ?

II.4 Montrer que X est un invariant de Riemann pour les 1- et 3-ondes de détente. Par ailleurs et en arguant du critère d'entropie de Lax, vérifier que les 1-ondes de choc se propagent nécessairement avec des vitesses strictement négatives. Quelle propriété sur X en déduit-on à la traversée d'un 1-choc ? Que devient cette propriété à la traversée d'un 3-choc ?

II.5 On introduit la variable $\pi = p + gX$. Déduire des précédentes questions que l'étude du problème de Riemann peut être ramenée à l'étude des projections des 1- et 3-courbes d'ondes dans le plan (u, π). On notera $u \to \pi_L(u) = p_L(u) + gX_L$ la projection de la 1-courbe des états connectant $\mathbf{w}_L$ à droite, et $u \to \pi_R(u) = p_R(u) + gX_R$ la projection de la 3-courbe des états connectant $\mathbf{w}_R$ à gauche.

II.6 On cherche à construire la projection $u \to p_L^c(u) + gX_L$ de la 1-courbe de chocs admissibles dans le plan (u, π) . Dans un premier temps, on propose de travailler en variable pression p en construisant la fonction $p \to u_L^c(p)$ à partir des relations de Rankine-Hugoniot. On lévera les éventuelles ambiguités de signe en caractérisant la partie entropique de cette fonction. Montrer que cette fonction est strictement monotone et définir $u \to p_L^c(u)$ comme étant son inverse. Reprendre cette question dans le cas de la 3-courbe de chocs admissibles.

II.7 On s'intéresse désormais aux ondes de détente. Construire la 1-onde de détente ainsi que sa projection $u \to p_L^d(u) + gX_L$ dans le plan (u, π). Préciser la monotonie de la fonction $p_L^d(u)$. Reprendre cette question dans le cas de la 3-onde de détente.

II.8 Indiquer comment résoudre, à l'aide des questions précédentes, le problème de Riemann pour (13), et montrer qu'il admet au plus une solution.

2.3 Partie III (5 points)

La motivation est de montrer que l'on peut construire des méthodes de volumes finis équilibres pour les équations (1) à la condition de choisir de "bons" solveurs de Riemann exacts ou approchés pour le système auxiliaire (13).

III.1 En admettant, si besoin est, les résultats de la partie I et de la fin de la partie II, montrer que le schéma de Godounov pour (13) conduit nécessairement à un schéma consistant et équilibre pour les équations avec terme source (1).

III.2 En considérant la linéarisée de Roe (10) pour le système homogène (8) issu de (1), montrer comment très simplement définir une linéarisée de Roe pour les équations auxiliaires (13). Par quelle propriété des méthodes de Roe est-on assuré que le schéma ainsi obtenu conduit à une méthode équilibre pour (1) ?

III.3 Pourquoi l'application à (13) du solveur de Riemann approché de Harten Lax et van Leer, basé sur un unique état intermédiaire, ne peut pas conduire à un schéma équilibre pour (1) ? En définitive, quelle propriété requérir pour qu'un solveur de Riemann approché associé à (13) définisse un schéma équilibre pour (1) ?