MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire et F. Coquel
Examen écrit du 15 Janvier 2009 (3 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

1 Problème I (14 points)

On considère le système de lois de conservation suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \Big(\rho v(\rho, \rho w) \Big) = 0, \\ \partial_t \rho w + \partial_x \Big(\rho w v(\rho, \rho w) \Big) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où l'inconnue conservative $\mathbf{u} = (\rho, \rho w)$ (ρ est une densité et w est une variable intrinsèque) appartient à l'espace des états :

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \{(\rho, \rho w) \in I\!R^2, \quad \rho > 0, \ \rho w \in I\!R\}. \tag{2}$$

Dans les équations (1), la loi de fermeture définissant la vitesse $v \in I\!R$ est donnée par :

$$v(\rho, \rho w) = \frac{\rho w}{\rho} - \pi(\rho), \tag{3}$$

où la fonction $\rho \in I\!R_+ \to \pi(\rho) \in I\!R_+$ est supposée satisfaire aux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l} \pi(0) = 0, \quad \lim_{\rho \to +\infty} \pi(\rho) = +\infty, \\ (\pi(\rho))' > 0, \quad (\rho \pi(\rho))'' > 0 \quad \text{avec} \quad ' \equiv \frac{d}{d\rho}. \end{array} \tag{4}$$

1.1 Le problème de Riemann

1) Analyser l'hyperbolicité du système (1) sur l'espace des états $\Omega_{\mathbf{u}}$ en privilégiant le changement de variable $\mathbf{u} = (\rho, \rho w) \in \Omega_{\mathbf{u}} \to \mathbf{v} = (\rho, v) \in \Omega_{\mathbf{v}}$. On donnera l'expression des valeurs propres et on leur associera une base de vecteurs propres à droite. On vérifiera que les valeurs propres sont naturellement ordonnées :

$$\lambda_1(\mathbf{v}) < \lambda_2(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \Omega_{\mathbf{v}}, \tag{5}$$

ce qui permet de définir sans ambiguïté les 1- et 2-champs.

2) Caractériser les propriétés de nonlinéarité des 1- et 2- champs. En donner les invariants de Riemann.

3) Soit $\mathbf{v}_L \in \Omega_{\mathbf{v}}$ un état donné. Déterminer la courbe des états $\mathbf{v} \in \Omega_{\mathbf{v}}$ que l'on peut connecter à $\mathbf{v}_L$ par la droite à l'aide d'une 1-onde de détente. On tracera cette courbe dans le demi-plan $\{(\rho, v) \in I\!R^2, \rho > 0, v \in I\!R\}$, après avoir précisé ses propriétés de monotonie.

4) Déterminer la courbe des états $\mathbf{v} \in \Omega_{\mathbf{v}}$ que l'on peut connecter à $\mathbf{v}_L$ par la droite à l'aide d'une 1-onde de choc. On adoptera comme critère d'admissibilité d'un choc les conditions de Lax relatives à l'entrelacement des valeurs propres. On tracera cette courbe dans le demi-plan $\{(\rho, v) \in I\!R^2, \rho > 0, v \in I\!R\}$, après avoir précisé ses propriétés de monotonie.

5) Soit $\mathbf{v}_R \in \Omega_{\mathbf{v}}$ un état donné. Déterminer la courbe des états $\mathbf{v} \in \Omega_{\mathbf{v}}$ que l'on peut connecter à $\mathbf{v}_R$ par la gauche à l'aide d'une 2-onde. On tracera cette courbe dans le demi-plan $\{(\rho, v) \in I\!R^2, \rho > 0, v \in I\!R\}$.

6) Enoncer une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution au problème de Riemann pour le système (1). Etudier l'unicité d'une telle solution et préciser la nature des ondes ($i.e$ choc, détente, discontinuité de contact) qui la composent en fonction des données $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$.

1.2 Principes du maximum et couples d'entropie

7) Soient $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$ deux états de $\Omega_{\mathbf{u}}$ pour lesquels la solution auto-semblable $\mathbf{w}(x/t; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ du problème de Riemann pour (1) existe. Etablir en conséquence de l'étude précédente, la validité des principes du maximum suivants, relatifs à la vitesse v et à la quantité $w \equiv (\rho w)/\rho = v + \pi(\rho)$: pour tout $\xi \in I\!R$,

$$\begin{cases} \min(v_L, v_R) \leq v(\mathbf{w}(\xi; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)) \leq \max(v_L, v_R), \\ \min(w_L, w_R) \leq w(\mathbf{w}(\xi; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)) \leq \max(w_L, w_R). \end{cases} \tag{6}$$

On souhaite dans les questions suivantes étendre la validité du principe du maximum portant sur w à des solutions générales du système (1).

8) Vérifier que les solutions régulières $\mathbf{u}(x, t)$ de (1) satisfont les lois de conservation supplémentaires :

$$\partial_t \mathcal{S}(\mathbf{u}) + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) = 0, \tag{7}$$

pour toute paire de fonctions scalaires $\mathcal{S}, \mathcal{F} : \Omega_{\mathbf{u}} \to I\!R$, de la forme $\mathcal{S}(\mathbf{u}) = \rho \mathcal{G}(\frac{\rho w}{\rho})$ et $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \rho \mathcal{G}(\frac{\rho w}{\rho}) v(\rho, \rho w)$, où $\mathcal{G} : I\!R \to I\!R$ désigne une fonction quelconque régulière.

En vérifiant la relation de saut de Rankine-Hugoniot correspondante, montrer que les ondes élémentaires discontinues du 2-champ de (1) vérifient aussi les lois de conservation (7) au sens des distributions. Montrer grâce à la question 4) que ce résultat reste vrai pour les solutions onde de choc admissible du 1-champ. Montrer que la fonction $\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}} \to \mathcal{S}(\mathbf{u}) \in I\!R$ est convexe dès que la fonction $y \in I\!R \to \mathcal{G}(y) \in I\!R$ est convexe.

Pour de telles fonctions, il est donc loisible de demander aux solutions faibles $\mathbf{u}$ de (1) de vérifier les inégalités d'entropies :

$$\partial_t \mathcal{S}(\mathbf{u}) + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \mathcal{D}'. \tag{8}$$

(*Nota Bene* : Le système (1) admet bien d'autres couples d'entropies $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ que ceux exhibés en (7) et qui ne vérifient cette fois plus la loi de conservation (8) au sens des distributions, mais une inégalité stricte à la traversé d'une 1-onde de choc. Notons que l'on ne demande pas d'exhiber de tels couples.)

8) Soit $\mathbf{u}_0 \in L^\infty(I\!R)$ une donnée initiale pour (1). Etablir (au moins formellement) que la solution faible de (1) du problème de Cauchy associé, vérifie l'estimation :

$$w(x,t) \leq \max_{x \in I\!R} w_0(x), \quad \text{p.p. } x, t. \tag{9}$$

On pourra à cette fin introduire $w_0^M = \max_{x \in I\!R} w_0(x)$ pour définir la fonction de la variable réelle y : $\mathcal{G}(y) = \max(0, y - w_0^M)$. Montrer ensuite l'estimation suivante :

$$\min_{x \in I\!R} w_0(x) \leq w(x,t), \quad \text{p.p. } x, t. \tag{10}$$

On admettra dans la suite la validité du principe du maximum sur la vitesse :

$$\min_{x \in I\!R} v_0(x) \leq v(x,t) \leq \max_{x \in I\!R} v_0(x), \quad \text{p.p. } x, t. \tag{11}$$

En considérant des données initiales dans L^∞ avec

$$\max_{x \in I\!R} v_0(x) < \min_{x \in I\!R} (v_0(x) + \pi(\rho_0(x))), \tag{12}$$

déduire de ce qui précède que les solutions faibles du problème de Cauchy associé restent, pour tout temps, dans l'espace des états $\Omega_{\mathbf{u}}$ tout en étant uniformément bornées en temps dans L^∞. Pourquoi la condition (12) est-elle naturelle ?

1.3 Approximation numérique

9) On considère une donnée initiale $\mathbf{u}_0$ dans $L^\infty(I\!R)$ possédant une vitesse constante : $v_0(x) \equiv v_0$. Qu'est ce qui permet d'affirmer que la solution du problème de Cauchy possède elle aussi une vitesse constante ? On approche numériquement cette solution par la méthode de Godunov. Montrer qu'à l'issue du premier pas de temps, la vitesse discrète vérifie :

$$v_j^1 \geq v_0, \quad j \in Z\!\!\!Z, \tag{13}$$

où l'inégalité est stricte en général. En d'autres termes, la méthode de Godunov ne respecte pas les régions invariantes du système (1). On pourra répondre à cette question en recourant à la formulation intégrale de la méthode de Godunov :

$$\mathbf{u}_j^1 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, \Delta t) dx, \quad j \in Z\!\!\!Z.$$

10) On considère une donnée initiale $\mathbf{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant la condition (12). On approche la solution du problème de Cauchy associé par la méthode de Glimm. Ce schéma produit à chaque instant $t^n = n\Delta t$ une approximation constante par morceaux :

$$\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n) = \mathbf{u}_j^n, \quad x \in]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$

qui est avancée à l'instant d'après en deux pas :

- *Evolution en temps.* Comme dans la méthode de Godunov, on résout exactement sur $[t^n, t^n + \Delta t[$, $\Delta t > 0$ suffisamment petit, les problèmes de Riemann pour (1) aux interfaces $x_{j+1/2}$ avec comme donnée initiale à l'instant t^n, la solution discrète $\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n)$. On note $\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n + \Delta t^-)$ la solution de ces problèmes à l'instant $t^n + \Delta t^-$.
- *Echantillonnage.* De manière à définir un état constant dans chaque cellule $]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$, on tire aléatoirement un réel $\theta^{n+1} \in]0, 1[$ et on pose :

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_{\Delta x}((x_{j-1/2} + \theta^{n+1}\Delta x)^-, t^n + \Delta t^-), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

A la date $t^0 = 0$, la donnée initiale discrète résulte également d'un échantillonnage : $\mathbf{u}_j^0 = \mathbf{u}_0(x_{j-1/2} + \theta^0 \Delta x)$, $j \in \mathbb{Z}$, pour un certain $\theta^0 \in]0, 1[$.

Vérifier, sous une condition CFL sur le pas de temps (que l'on précisera), que le schéma est bien défini, c'est-à-dire qu'on peut toujours résoudre les problèmes de Riemann aux interfaces $x_{j+1/2}$ pour tout temps t^n. Quel avantage immédiat possède le schéma de Glimm sur celui de Godunov ?

2 Problème II (6 points)

On considère l'équation hyperbolique scalaire avec conditions aux limites périodiques

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(t, x+1) = u(t, x) & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0, x) = u^0(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{16}$$

où l'inconnue $u(t, x)$ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 1 par rapport à x, la donnée initiale $u^0(x)$ est une fonction continue et 1-périodique, et la fonction de flux f est de classe C^2.

On considère le schéma, implicite en temps, pour $n \geq 0$ et $1 \leq j \leq N$,

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\Big(g(u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}) - g(u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n+1})\Big) \\ u_{j+N}^{n+1} = u_j^{n+1} \\ u_j^0 = u^0(x_j), \end{cases} \tag{17}$$

avec les notations usuelles du cours, c'est-à-dire que $\lambda = \Delta t/\Delta x$, $\Delta x = 1/N$, $t^n = n\Delta t$, $x_j = j\Delta x$, et u_j^n est une approximation de $u(t^n, x_j)$. La fonction de flux numérique $g(a,b)$ est supposée de classe C^1, consistante avec le flux f, i.e., $g(u,u)=f(u)$, et vérifie

$$\frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \geq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial b}(a,b) \leq 0.$$

On admettra qu'il existe toujours au moins une solution (u_j^{n+1}) au système d'équations non-linéaires (17). On admettra aussi que le schéma (17) est monotone au sens suivant :

$$u_j^n \leq v_j^n \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad u_j^{n+1} \leq v_j^{n+1} \quad \forall j$$

pour toute solution (éventuellement non unique) (u_j^{n+1}) de (17), et toute autre solution (v_j^{n+1}) correspondant à l'état précédent (v_j^n).

1. Vérifier que le schéma (17) est conservatif, c'est-à-dire que

$$\sum_{j=1}^{N} u_j^{n+1} = \sum_{j=1}^{N} u_j^n.$$

   Vérifier aussi que, si u_j^n est égal à une constante C pour tout j, alors une solution de (17) est aussi $u_j^{n+1}=C$.
2. En appliquant un lemme du cours, montrer qu'on peut déduire de la monotonie du schéma l'unicité de la solution de (17) ainsi qu'une borne L^∞ uniforme pour la solution.
3. En pratique pour calculer la solution (u_j^{n+1}) de (17) on utilise l'algorithme itératif suivant qui calcule une suite $(u_j^{n+1,m})$, pour $m \geq 1$, définie par

$$\begin{aligned} u_j^{n+1,m} = u_j^n \quad & -\lambda C_{j+1/2}^{n+1,m-1}\Big(u_{j+1}^{n+1,m} - u_j^{n+1,m}\Big) \\ & +\lambda D_{j-1/2}^{n+1,m-1}\Big(u_j^{n+1,m} - u_{j-1}^{n+1,m}\Big), \end{aligned} \tag{18}$$

   avec

$$C_{j+1/2}^{n+1,m-1} = \frac{g(u_j^{n+1,m-1}, u_{j+1}^{n+1,m-1}) - f(u_j^{n+1,m-1})}{u_{j+1}^{n+1,m-1} - u_j^{n+1,m-1}}$$

   et

$$D_{j-1/2}^{n+1,m-1} = \frac{g(u_{j-1}^{n+1,m-1}, u_j^{n+1,m-1}) - f(u_j^{n+1,m-1})}{u_j^{n+1,m-1} - u_{j-1}^{n+1,m-1}}.$$

   Vérifier que les coefficients $C_{j+1/2}^{n+1,m-1}$ et $D_{j-1/2}^{n+1,m-1}$ sont toujours finis et négatifs.
4. Ecrire la matrice du système linéaire qu'il faut inverser pour résoudre (18) à chaque itération m. Montrer qu'elle est inversible.
5. Vérifier que, si la suite $(u_j^{n+1,m})$ converge lorsque m tends vers $+\infty$, alors elle converge vers la solution de (17).
6. Montrer que l'algorithme itératif (18) vérifie le principe du maximum, c'est-à-dire que, si $u_j^n \leq M$ pour tout j, alors $u_j^{n+1,m} \leq M$ pour tout j et tout m.