MASTER M2 E.D.P. ET ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire et F. Coquel
Examen écrit du 7 Janvier 2010 (3 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction. L'examen est composé d'un exercice et d'un problème qui ne sont pas indépendants. Seul le résultat de la première question de l'Exercice sera utilisé lors du Problème. Les notations et définitions suivantes ne sont pas nécessaires à la résolution de l'Exercice.

Considérons un système de p, $p \geq 1$, lois de conservation

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

d'inconnue $\mathbf{u} \in \Omega \subset \mathbb{R}^p$ et de fonction flux $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$, où Ω désigne un ouvert convexe qui sera le plus souvent confondu avec $\mathbb{R}^p$ sauf dans les exemples à venir liés à la dynamique des gaz. Dans toute la suite, le système (1) sera supposé hyperbolique.

On appelle *décomposition de flux* associée à (1) une décomposition de $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ de la forme

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^+(\mathbf{u}) + \mathbf{f}^-(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \tag{2}$$

où les fonctions flux $\mathbf{f}^+, \mathbf{f}^- : \Omega \to \mathbb{R}^p$ sont supposées de classe $\mathcal{C}^1$, de matrices Jacobiennes $\nabla \mathbf{f}^+(\mathbf{u})$ et $\nabla \mathbf{f}^-(\mathbf{u})$ toutes deux diagonalisables sur $\mathbb{R}$ pour tout $\mathbf{u} \in \Omega$.

De *manière centrale*, les valeurs propres de $\nabla \mathbf{f}^+(\mathbf{u})$ (respectivement de $\nabla \mathbf{f}^-(\mathbf{u})$) sont supposées toutes positives ou nulles (resp. toutes négatives ou nulles), *i.e.* :

$$\lambda_1^-(\mathbf{u}) \leq \lambda_2^-(\mathbf{u}) \leq \cdots \leq \lambda_p^-(\mathbf{u}) \ \leq 0 \leq \ \lambda_1^+(\mathbf{u}) \leq \lambda_2^+(\mathbf{u}) \leq \cdots \leq \lambda_p^+(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega. \tag{3}$$

Notons en revanche que les valeurs propres de $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{u})$ n'ont en règle générale pas de signe privilégié. Dans la suite, $\{\mathbf{r}_i^+(\mathbf{u})\}_{1 \leq i \leq p}$ (respectivement $\{\mathbf{r}_i^-(\mathbf{u})\}_{1 \leq i \leq p}$) désigne une base de vecteurs propres à droite associés à $\nabla \mathbf{f}^+(\mathbf{u})$ (resp. $\nabla \mathbf{f}^-(\mathbf{u})$).

En pratique, une décomposition $(\mathbf{f}^+, \mathbf{f}^-)$ du flux $\mathbf{f}$ permet d'introduire les deux systèmes hyperboliques suivants :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{f}^+(\mathbf{v}) = 0, \tag{4}$$

et

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}^-(\mathbf{w}) = 0. \tag{5}$$

Sommairement, le système (4) permet d'approcher les ondes se propageant à vitesse positive dans les solutions du système (1) alors que le système (5) est dévolu à l'approximation des ondes de vitesse négative. Cette heuristique sera fondée en Section 3, consacrée à l'approximation numérique des solutions de (1). La Section 2 étudie l'existence de décompositions de flux (2)–(3) pour différents modèles hyperboliques. La Section 4 énoncera des conditions de consistance d'une telle décomposition de flux avec d'éventuelles paires d'entropie pour (1). Les exemples de la Section 2 seront de nouveau analysés à cette occasion.

1 Exercice (6 points)

Dans cette Section on considère les équations d'Euler pour un fluide barotrope

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

pour la loi de pression particulière :

$$p(\rho) = \frac{1}{3}\rho^3, \quad \rho > 0. \tag{7}$$

L'espace des états associés à (6)–(7) est classiquement

$$\Omega = \{\mathbf{u} = (\rho, \rho u) \in \mathbb{R}^2 / \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}\}. \tag{8}$$

Les résultats de la question (I.1), ci-dessous, seront exploités lors des questions (II.3.i)–(II.3.iv) du Problème.

- (I.1) Ecrire le système (6)–(7) dans le nouveau jeu de variables $\mathbf{z} = (\rho, u)$. Donner l'expression des valeurs propres et d'une base associée de vecteurs propres à droite dans ces variables. Caractériser la nature des champs associés.
- (I.2) Ecrire l'équation d'évolution satisfaite par $\mathcal{R}^+(\rho, u) = u + \rho$ pour les solutions régulières de (6)–(7). Même question pour $\mathcal{R}^-(\rho, u) = u - \rho$. Déduire du cours consacré aux lois de conservation scalaires les principes du maximum suivants pour $\mathcal{R}^+$ et $\mathcal{R}^-$:

$$\min_{y \in \mathbb{R}} \mathcal{R}^{\pm}(\rho_0, u_0)(y) \leq \mathcal{R}^{\pm}(\rho, u)(x, t) \leq \max_{y \in \mathbb{R}} \mathcal{R}^{\pm}(\rho_0, u_0)(y), \quad \text{pour tout } x, \ t. \tag{9}$$

- (I.3) En arguant de ce qui précède, sous quelle condition suffisante sur la donnée initiale $\mathbf{u}_0$ pour (6)–(7), le problème de Cauchy associé admet-il une solution régulière ? On notera que la solution considérée doit posséder une densité ρ strictement positive, de sorte à appartenir à l'espace des états Ω introduit en (8).
- (I.4) Pour deux états constant $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$ dans Ω on considère le problème de Riemann pour (6)–(7) avec la donnée initiale :

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0. \end{cases} \tag{10}$$

  Sous quelle condition sur $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$ obtient-on une solution auto-sembable régulière appartenant en tout point à Ω ? Tracer cette solution dans le plan (x, t).
- (I.5) Dans le cas d'une donnée initiale conduisant à une solution discontinue, quelles relations de saut doit-on invoquer ? (on ne demande pas de résoudre ces relations).

Problème (14 points)

2 Quelques exemples de décomposition de flux

- (II.1) Considérons le cas d'une équation scalaire $p = 1$ pour une fonction flux $f(u)$ strictement convexe. On suppose que l'équation $f'(u) = 0$ admet une unique solution finie $u^\star \in \mathbb{R}$. La fonction flux étant définie à une constante près, on suppose aussi, sans perte de généralité, que $f(u^\star) = 0$. On considère alors :

$$f^+(u) = f(max(u, u^\star)), \quad f^-(u) = f(min(u, u^\star)), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

  On notera que les fonctions proposées sont bien de classe $\mathcal{C}^1$. Justifier en quoi la paire (f^+, f^-) constitue une décomposition du flux f.
- (II.2) Revenons au cas général (1) d'un système hyperbolique de lois de conservation. Soit $\mathcal{K}$ un compact quelconque de $\mathbb{R}^p$, introduisons :

$$\mathbf{f}^+(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{f}(\mathbf{u}) + b_{\mathcal{K}}\mathbf{u}\Big), \quad \mathbf{f}^-(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{f}(\mathbf{u}) - b_{\mathcal{K}}\mathbf{u}\Big), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{K} \tag{11}$$

  où $b_{\mathcal{K}}$ désigne un réel positif. A quelle condition pour des états $\mathbf{u}$ choisis dans un compact $\mathcal{K}$ donné, la paire ainsi proposée réalise-t-elle une décomposition du flux $\mathbf{f}$?
- (II.3) Cette question est consacrée aux équations d'Euler barotrope (6)–(7), étudiées à l'occasion de l'Exercice. On introduit la notation $m = u/\rho$ de sorte à définir le changement de variable $(\rho, m) \in \mathbb{R}^+_\star \times \mathbb{R} \to (\rho, u(\rho, m)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. La fonction flux $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ associée à (6)–(7) trouve la forme condensée suivante :

$$\mathbf{f}(\rho, m) = (\rho^2 a(m),\ \rho^3 b(m)), \quad a(m) = m, \quad b(m) = (m^2 + \frac{1}{3}). \tag{12}$$

  On étudie une décomposition $(\mathbf{f}^+, \mathbf{f}^-)$ de ce flux, en introduisant $\mathbf{f}^+$ sous la forme :

$$\mathbf{f}^+(\rho, m) = (\rho^2 a^+(m),\ \rho^3 b^+(m)), \tag{13}$$

  où les fonctions scalaires (a^+, b^+) de la variable m sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies par :

$$(a^+(m), b^+(m)) = \begin{cases} (0,0), & m < -1, \\ (\frac{1}{4}(m+1)^2, \frac{1}{6}(m+1)^3), & -1 \leq m \leq 1, \\ (m, (m^2 + \frac{1}{3})) & m > 1. \end{cases} \tag{14}$$

  Bien sûr, le flux $\mathbf{f}^-$ est déduit de $\mathbf{f}^+$ au travers de la condition de consistance (2). On souhaite vérifier que la paire $(\mathbf{f}^+, \mathbf{f}^-)$ ainsi proposée réalise bien une décomposition du flux consistante avec la condition de signe (3). On commence par analyser les propriétés spectrales de $\nabla\mathbf{f}^+$ pour ensuite déduire celles de $\nabla\mathbf{f}^-$. **Indication :** l'analyse sera menée dans les variables $\mathbf{z} = (\rho, u)$.
  - (II.3.i) En arguant de résultats de la question (I.1), exhiber sans calcul dans le cas $m > 1$ les valeurs propres et vecteurs propres du système (4)–(14) de flux $\mathbf{f}^+$. Pourquoi la même base de vecteurs propres, exprimée dans les mêmes variables, convient-elle lorsque $m < -1$?

- (II.3.ii) Caractériser les valeurs propres et des vecteurs propres associés, du système (4)–(14) lorsque $m \in [-1, 1]$. En déduire l'expression d'une base de vecteurs propres à droite associée lorsque $m \in \mathbb{R}$.
- (II.3.iii) En arguant de la question (I.1), quel lien remarque-t-on entre les vecteurs propres à droite associés à (4)–(14) et ceux du système initial (6)–(7) ? Pourquoi cette propriété est-elle indépendante d'un changement de variable ?
- (II.3.iv) Déduire de ce qui précède une base de vecteurs propres à droite, associée au système (5) de flux $\mathbf{f}^-$. Donner en conséquence les valeurs propres associées à $\nabla \mathbf{f}^-$ et analyser leur signe lorsque m parcours $\mathbb{R}$. Conclure.

3 Application à l'approximation numérique de (1)

Cette section étudie l'approximation numérique des solutions du système (1) à l'aide d'une décomposition $(\mathbf{f}^+, \mathbf{f}^-)$ du flux $\mathbf{f}$. Nous exploitons à cette fin les solutions du problème de Riemann respectivement pour le système (4) de flux $\mathbf{f}^+$ et pour le système (5) de flux $\mathbf{f}^-$. Les solutions choc admissibles sont sélectionnées grâce au critère de Lax d'entrelacement des valeurs propres de $\nabla \mathbf{f}^+$ (resp. $\nabla \mathbf{f}^-$) avec la vitesse de choc. On suppose que chacun des champs des systèmes (4) et (5) est soit vraiment non-linéaire, soit linéairement dégénéré, ce qui garantit (par un théorème du cours) l'existence des solutions aux problèmes de Riemann considérés pour des données gauche et droite $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$ suffisamment proches. Notons $\omega_+(\frac{x}{t}, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ (respectivement $\omega_-(\frac{x}{t}, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$) la solution ainsi construite du problème de Riemann pour le système (4) (resp. pour le système (5)).

- (III.1) Montrer que $\mathbf{f}^+(\omega_+(\xi, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R))$ est continue en $\xi = 0$. Donner sa valeur en fonction de la donnée initiale. Même question pour $\mathbf{f}^-(\omega_-(\xi, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R))$.

On propose d'approcher les solutions $\mathbf{u}$ de (1) par des fonctions constantes par morceaux $\mathbf{u}_h$, définies conformément au cours par la donnée d'un pas de temps $\Delta t > 0$ et d'espace $\Delta x > 0$ constants, selon :

$$\mathbf{u}_h(x, t^n) = \mathbf{u}_j^n, \quad x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}), \quad x_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta x, \; t^n = n\Delta t, \tag{15}$$

avec $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. La donnée initiale discrète $\mathbf{u}_h^0$ est définie usuellement par projection de la donnée initiale exacte $\mathbf{u}_0$ sur chaque cellule $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$. Supposant connue la solution approchée $\mathbf{u}_h(x, t^n)$ à la date t^n, celle-ci est mise à jour à l'instant t^{n+1} en supposant satisfaite la condition CFL :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{\mathbf{u}}\left(\max_{1 \le j \le p} |\lambda_j^+(\mathbf{u})|, \max_{1 \le j \le p} |\lambda_j^-(\mathbf{u})|\right) \le \frac{1}{2}, \tag{16}$$

pour tous les états $\mathbf{u}$ concernés. Ayant résolu les problèmes de Riemann pour les systèmes en $\mathbf{f}^+$ et $\mathbf{f}^-$ à chaque interface, à savoir disposant des solutions auto-semblables $\omega_+(\xi, \mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n)$ et $\omega_-(\xi, \mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on introduit leurs moyennes suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}^-)_{j+1/2}^{n+1} &= \frac{2}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \omega_-\left(\frac{x - x_{j+1/2}}{\Delta t}, \mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n\right) dx, \\
(\mathbf{u}^+)_{j+1/2}^{n+1} &= \frac{2}{\Delta x} \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} \omega_+\left(\frac{x - x_{j+1/2}}{\Delta t}, \mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n\right) dx.
\end{aligned} \tag{17}$$

(On portera attention aux bornes d'intégration distinctes !) On définit alors la mise à jour recherchée $\mathbf{u}_j^{n+1}$ dans la cellule $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ en posant :

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2}\Big((\mathbf{u}^+)_{j-1/2}^{n+1} + (\mathbf{u}^-)_{j+1/2}^{n+1}\Big), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

- (III.2) Evaluer sous la condition CFL (16), les moyennes $(\mathbf{u}^+)_{j+1/2}^{n+1}$ et $(\mathbf{u}^+)_{j+1/2}^{n+1}$ en fonction de $\mathbf{u}_j^n$ et $\mathbf{u}_{j+1}^n$.
- (III.3) En déduire que la mise à jour (18) proposée conduit bien à un schéma de volume fini conservatif et consistant avec (1)

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\mathbf{g}_{j+1/2}^n - \mathbf{g}_{j-1/2}^n\Big), \quad j \in \mathbb{Z},\ n \geq 0, \tag{19}$$

  dont on explicitera la fonction flux numérique $\mathbf{g}_{j+1/2}^n$.

4 Consistance avec la condition d'entropie

On suppose désormais que le système hyperbolique (1) admet un couple d'entropie $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ où l'application $\mathbf{u} \in \Omega \to U(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ est strictement convexe. Ce couple d'entropie permet de sélectionner les solutions faibles entropiques de (1) selon la condition :

$$\partial_t \mathcal{U}(\mathbf{u}) + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}). \tag{20}$$

La décomposition de flux $(\mathbf{f}^-, \mathbf{f}^+)$ (2) est dite consistante avec la paire d'entropie $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ s'il existe des fonctions flux d'entropie $\mathcal{F}^-, \mathcal{F}^- : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que toutes solutions régulières $\mathbf{v}$ de (4), respectivement $\mathbf{w}$ de (5), vérifient respectivement :

$$\partial_t \mathcal{U}(\mathbf{v}) + \partial_x \mathcal{F}^+(\mathbf{v}) = 0,$$

et

$$\partial_t \mathcal{U}(\mathbf{w}) + \partial_x \mathcal{F}^-(\mathbf{w}) = 0.$$

L'existence de ces couples d'entropie permet de sélectionner respectivement les solutions faibles du système (4) par l'inégalité différentielle :

$$\partial_t \mathcal{U}(\mathbf{v}) + \partial_x \mathcal{F}^+(\mathbf{v}) \leq 0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \tag{21}$$

et les solutions faibles de (5) par :

$$\partial_t \mathcal{U}(\mathbf{w}) + \partial_x \mathcal{F}^-(\mathbf{w}) \leq 0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}). \tag{22}$$

- (IV.1) Etablir que les flux d'entropie $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ vérifient nécessairement (à une constante près) la relation :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}^+(\mathbf{u}) + \mathcal{F}^-(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \Omega. \tag{23}$$

– (IV.2) On suppose les solutions du problème de Riemann pour (4) (respectivement pour (5)) sélectionnées grâce à l'inégalité d'entropie (21) (resp. (22)). Montrer que sous la condition CFL (16), la méthode de volumes finis (17)–(18) est consistante avec l'inégalité d'entropie (20), à savoir que les inégalités suivantes ont lieu :

$$\mathcal{U}(\mathbf{u}_j^{n+1}) - \mathcal{U}(\mathbf{u}_j^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\mathcal{G}_{j+1/2}^n - \mathcal{G}_{j-1/2}^n\Big) \leq 0, \quad j \in \mathbb{Z},\ n \geq 0, \tag{24}$$

pour une fonction flux d'entropie numérique $\mathcal{G}$ que l'on précisera.

On analyse ci-dessous la consistance des exemples de décomposition de flux proposées en Section 2 avec les inégalités d'entropie différentielles susceptibles d'être associées à (1).

– (IV.3) Justifier pourquoi la décomposition de flux (II.1) introduite dans le cas scalaire est consistante avec toutes les paires d'entropies $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $\mathcal{U}(u)$ convexe en u, que l'on peut associer à la loi scalaire de flux $f(u)$. On donnera à cette fin l'expression des flux d'entropies $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$. Quelle propriété de la fonction flux numérique associée à la méthode de volumes finis (19) aurait permis d'établir la consistance avec toutes les inégalités d'entropies ?

– (IV.4) Montrer que la décomposition de flux (11) introduite dans le cadre des systèmes à la question (II.2) est consistante avec toutes les paires d'entropie $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ susceptibles d'être associées au système (1), en établissant que les systèmes (4) et (5) admettent des flux d'entropies $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ pour chacune des entropies $\mathcal{U}$ considérées.

– (IV.5) Considérons la décomposition de flux (13)–(14) associée à la dynamique des gaz barotropes (6)–(7). En arguant de la propriété liant les vecteurs propres à droite de $\nabla\mathbf{f}^+$ et $\nabla\mathbf{f}^-$ à ceux de $\nabla\mathbf{f}$ (*cf* questions (II.3)), déduire que pour toute paire d'entropie $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ associée à (1), les matrices $\nabla^2\mathcal{U}\nabla\mathbf{f}^+$ et $\nabla^2\mathcal{U}\nabla\mathbf{f}^-$ sont symétriques. En déduire que la technique de décomposition de flux (11) est consistante avec toutes les paires d'entropie associées à (6)–(7).