MASTER M2 MATHEMATIQUES DE LA MODÉLISATION
SORBONNE UNIVERSITE - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire "systèmes hyperboliques de lois de conservation"
Examen écrit du 16 Janvier 2019 (3 heures)

Important: La notation des copies prendra en compte la clarté et la qualité de la rédaction. Le barême est donné à titre indicatif et est censé refléter la difficulté relative de chacune des parties.

1 Problème de Riemann (6 points)

On considère l'équation hyperbolique suivante, avec $f(u) = 2\sqrt{u}$, en une dimension d'espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \\ u(0,x) = \left\{ \begin{array}{ll} u_L & \text{si } x < 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{array} \right. , \end{array} \right. \tag{1}$$

où $u(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction que l'on supposera toujours positive, ainsi que les valeurs $u_L, u_R \in \mathbb{R}^+$.

1. Donner la condition de Rankine-Hugoniot pour que la solution de (1) soit un choc reliant u_L à u_R.
2. A quelle condition sur u_L et u_R le choc est-il entropique ?
3. On cherche une solution auto-similaire, du type $u(t,x) = v(\xi)$ avec $\xi = x/t$ et v une fonction régulière. Calculer la fonction v si u est solution.
4. A quelle condition sur u_L et u_R trouve-t-on une solution auto-similaire continue de (1) ? Donner explicitement une telle solution.

2 Système hyperbolique (14 points)

On considère le système de lois de conservation en une dimension d'espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x \Big(\rho(\alpha - \rho) \Big) = 0, \\ \partial_t \rho\alpha + \partial_x \Big(\rho\alpha(\alpha - \rho) \Big) = 0, \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\rho(t,x) > 0$ est une densité et $\alpha(t,x)$ est une variable d'état dans $\mathbb{R}$. On définit une vitesse :

$$v = \alpha - \rho.$$

1. Montrer que le système (2) est strictement hyperbolique pour $(\rho, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. On pourra utiliser le changement de variable $\mathbf{u} = (\rho, \rho\alpha) \to \mathbf{v} = (\rho, v)$. On donnera l'expression des valeurs propres $\lambda_1(\mathbf{v}) < \lambda_2(\mathbf{v})$ et on leur associera une base de vecteurs propres.
2. Caractériser les propriétés de nonlinéarité des 1- et 2- champs. En donner les invariants de Riemann.

3. Vérifier que les solutions régulières $\mathbf{u}(x,t)$ de (2) satisfont les lois de conservation supplémentaires :
$$\partial_t \mathcal{S}(\mathbf{u}) + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) = 0,$$
pour toute paire de fonctions scalaires $\mathcal{S}, \mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de la forme $\mathcal{S}(\mathbf{u}) = \rho \mathcal{G}(\alpha)$ et $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \rho \mathcal{G}(\alpha) v$, où $\mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction quelconque régulière. En déduire que $\mathcal{S}$ est une entropie de (2) dès que la fonction $\mathcal{G}$ est convexe.

4. Soit $\mathbf{v}_L \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ un état donné. Déterminer la courbe des états à droite $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ que l'on peut connecter à $\mathbf{v}_L$ à l'aide d'une 1-onde de détente. On tracera cette courbe dans le demi-plan $(\rho, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

5. Déterminer la courbe des états à droite $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ que l'on peut connecter à $\mathbf{v}_L$ à l'aide d'une 1-onde de choc. On montrera que les conditions de Rankine Hugoniot impliquent que le saut de α est nul à travers le choc. On utilisera ensuite les conditions d'admissibilité de Lax (relatives à l'entrelacement des valeurs propres) pour sélectionner les chocs admissibles ou entropiques. On tracera cette courbe dans le demi-plan $(\rho, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

6. Soit $\mathbf{v}_R \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ un état donné. Déterminer la courbe des états à gauche $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ que l'on peut connecter à $\mathbf{v}_R$ à l'aide d'une 2-onde. On tracera cette courbe dans le demi-plan $(\rho, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

7. En déduire la solution du problème de Riemann pour le système (2). On montrera qu'elle est unique et on précisera la nature des ondes (*i.e* choc, détente, discontinuité de contact) qui la composent en fonction des données $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$.

8. Soient $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$ deux états de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $\mathbf{w}(x/t; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ la solution autosemblable du problème de Riemann pour (2). Etablir en conséquence de l'étude précédente, la validité des principes du maximum suivants, relatifs à la vitesse v et à la variable α : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} \min(v_L, v_R) \leq v(\mathbf{w}(\xi; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)) \leq \max(v_L, v_R), \\ \min(\alpha_L, \alpha_R) \leq \alpha(\mathbf{w}(\xi; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)) \leq \max(\alpha_L, \alpha_R). \end{cases}$$