DEA D'ANALYSE NUMERIQUE
UNIVERSITE PARIS 6 - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire
Examen écrit du 25 Janvier 2001 (3 heures)

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice I (5 points)
Soit l'équation d'advection linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

avec une vitesse constante et positive $a > 0$. On note u_i^n une approximation de la solution u au point $(t,x) = (n\Delta t, i\Delta x)$ avec $\Delta t, \Delta x > 0$ les pas de temps et d'espace. On pose

$$c = a\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

On considère le schéma de Beam-Warming

$$u_i^{n+1} = \frac{c(c-1)}{2}u_{i-2}^n + c(2-c)u_{i-1}^n + \frac{(c-1)(c-2)}{2}u_i^n$$

et celui de Fromm

$$u_i^{n+1} = \frac{c(c-1)}{4}u_{i-2}^n + \frac{c(5-c)}{4}u_{i-1}^n + \frac{(1-c)(c+4)}{4}u_i^n + \frac{c(c-1)}{4}u_{i+1}^n$$

1. Montrer que ces deux schémas sont consistants et d'ordre 2.

2. Pour étudier la stabilité L^2 d'un schéma, on considère des solutions discrètes particulières du type
$$u_j^n = A^n \exp(\imath\xi j\Delta x), \qquad (1)$$
où A est l'amplitude et ξ la fréquence de cette solution, tandis que $\imath$ désigne la racine complexe de -1. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il existe une valeur de $A \neq 0$, que l'on calculera, telle que (1) soit une solution particulière du schéma de Beam-Warming.

3. On dit que le schéma est stable L^2 si $|A| \leq 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Montrer que le schéma de Beam-Warming est stable L^2 sous la condition CFL $0 \leq |c| \leq 2$. Quel avantage de ce schéma en déduisez-vous par rapport aux schémas usuels étudiés en cours ?

Exercice II (8 points)
Soit f une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on considère l'équation parabolique

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial f(u_\epsilon)}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial^2 x} = 0$$

où $\epsilon > 0$ est un petit paramètre de viscosité destiné à tendre vers 0. On cherche des solutions particulières de cette équation, qu'on appelle ondes progressives, sous la forme

$$u_\epsilon(x,t) = u\left(\frac{x-ct}{\epsilon}\right) \tag{2}$$

où c est une constante qui représente la vitesse de l'onde progressive, et $u(\xi)$ est une fonction régulière de la variable $\xi \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\lim_{\xi\to+\infty} u(\xi) = u_R \text{ et } \lim_{\xi\to+\infty} u'(\xi) = 0,$$
$$\lim_{\xi\to-\infty} u(\xi) = u_L \text{ et } \lim_{\xi\to-\infty} u'(\xi) = 0.$$

1. Montrer que, si une solution de la forme (2) existe, alors, quelque soit $\epsilon > 0$, la fonction u vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$-u' - c\,u + f(u) = j \tag{3}$$

   où j est une constante et u' désigne la dérivée de $u(\xi)$ par rapport à ξ.

2. En déduire la valeur de j ainsi que celle de c en fonction de u_L et u_R. Que vous rappelle la relation qui définit c ?

3. On suppose désormais que $f(u) = u^2/2$ (équation de Burgers). Intégrer l'équation (3) et montrer que ses solutions **globales** sur $\mathbb{R}$ sont nécessairement de la forme

$$u(\xi) = \frac{u_L + u_R \exp\left(\frac{u_L-u_R}{2}(\xi-\xi_0)\right)}{1+\exp\left(\frac{u_L-u_R}{2}(\xi-\xi_0)\right)}$$

   où ξ_0 est une constante d'intégration.

4. Montrer que, si $u_L \geq u_R$, alors la solution précédente u vérifie bien les conditions aux limites éxigées en $\pm\infty$, tandis que, si $u_L < u_R$, u ne peut pas les vérifier (autrement dit, il n'existe d'ondes progressives que si $u_L \geq u_R$). Que vous rappelle ce critère d'existence ?

5. Calculer la limite (presque partout) de $u_\epsilon(x,t)$ lorsque ϵ tends vers 0 (avec $u_L \geq u_R$). En déduire que seuls les chocs entropiques sont limites visqueuses d'ondes progressives.

Exercice III (7 points)
Soient f et g deux fonctions continuement dérivables de $I\!R$ dans $I\!R$. On considère le système hyperbolique suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{f(u)}{v-u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{vf(u)}{v-u}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{g(v)}{v-u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{ug(v)}{v-u}\right) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

On note K le convexe de $I\!R^2$ défini par $K = \{(u,v) \in I\!R^2 \mid u < v\}$.

1. Montrer que, pour des solutions régulières à valeur dans K, le système (4) est équivalent à
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

2. En déduire que le système est hyperbolique sur K et que les deux champs sont linéairement dégénérés. Donner les invariants de Riemann pour ces deux champs.

3. Montrer que les relations de saut de Rankine-Hugoniot pour le système (4) sont indépendantes du choix de f et g.

4. Soient (u_L, v_L) et (u_R, v_R) deux états constants dans K (gauche et droit respectivement) vérifiant $u_L < v_R$. Résoudre explicitement le problème de Riemann pour (4) avec la donnée initiale
$$(u,v)(x) = \begin{cases} (u_L, v_L) \text{ si } x < 0, \\ (u_R, v_R) \text{ si } x > 0. \end{cases}$$